



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



Associazione
"Incontri con la matematica"



NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica *e la sua didattica*

Anno 29, n. 2, 2021

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2021



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



Associazione
"Incontri con la matematica"



NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica *e la sua didattica*

Anno 29, n. 2, 2021

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

In copertina:

Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).

Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

Logo dell'Associazione "Incontri con la matematica" fondata nel 2010 con sede in Bologna.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

<http://www.dm.unibo.it/rsddm>

<http://www.incontriconlamatematica.net>

<http://www.incontriconlamatematica.org>

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Redazione: Maura Iori (maura@iori-maura.191.it)

Direttore responsabile: Bruno D'Amore

Proprietà Direzione Amministrazione Redazione, presso Associazione Incontri con la Matematica

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

Scientificità riconosciuta ANVUR

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:

<http://www.dm.unibo.it/rsddm>

<http://www.incontriconlamatematica.net>

<http://www.incontriconlamatematica.org>

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia e Associazione Incontri con la Matematica, Bologna, Italia.

Comitato di redazione

Direttore: Maura Iori (Italia)
Gianfranco Arrigo (Svizzera)
Miglina Asenova (Italia)
Benedetto Di Paola (Italia)
Iliada Elia (Cipro)
Olga Lucia Léon (Colombia)
Pedro Javier Rojas (Colombia)
Sergio Vastarella (Italia)

Comitato scientifico:

Direttore: Bruno D'Amore (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia)
Samuele Antonini (Università di Firenze, Italia)
Luis Carlos Arboleda (Universidad del Valle, Cali, Colombia)
Luis Moreno Armella (Cinvestav, Ciudad de México, México)
Ferdinando Arzarello (Università di Torino, Italia)
Giorgio Bolondi (Università di Bolzano, Italia)
Guy Brousseau (Université de Bordeaux, Francia)
Ricardo Cantoral (Cinvestav, Ciudad de México, México)
Raymond Duval (Professeur Honoraire de l'Université du Littoral Côte d'Opale, Francia)
Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna, Italia)
Vicenç Font (Universitat de Barcellona, Spagna)
Athanasios Gagatsis (University of Cyprus, Nicosia, Cipro)
Juan D. Godino (Universidad de Granada, Spagna)
Pedro Gómez (Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia)
Colette Laborde (Université de Grenoble, Francia)
Salvador Llinares (Universidad de Alicante, Spagna)
Maria Alessandra Mariotti (Università di Siena, Italia)
Luis Radford (Université Laurentienne, Canada)
Luis Rico (Universidad de Granada, Spagna)
Bernard Sarrazy (Université de Bordeaux, Francia)
Silvia Sbaragli (Dipartimento Formazione e Apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera)
Carlos Eduardo Vasco Uribe (Universidad Nacional de Colombia, Emeritus, Bogotá, Colombia)
Fernando Zalamea (Universidad Nacional, Bogotá, Colombia)

Indice

Dedication <i>Bruno D'Amore</i>	pp. 117–118
Editoriale <i>Bruno D'Amore</i>	pp. 119–121
Análisis a los vectores de la ética comunitaria en una actividad de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas Analysis of the vectors of community ethics in a mathematics teaching-learning activity Analisi dei vettori dell'etica comunitaria in un'attività di insegnamento-apprendimento della matematica <i>Adriana Lasprilla Herrera</i>	pp. 123–143
Unas reflexiones básicas sobre el tema de las relaciones entre ética y didáctica de la matemática Some basic reflections on the issue of the relationship between ethics and mathematics education Riflessioni di base sul tema delle relazioni fra etica e didattica della matematica <i>Bruno D'Amore</i>	pp. 145–158
Hibridación de teorías en el sistema teórico del enfoque ontosemiótico Hybridisation of theories in the onto-semiotic theoretical system Ibridazione di teorie nel sistema teorico dell'approccio ontosemiotico <i>Juan D. Godino</i>	pp. 159–184
Mathematics teaching and learning as an ethical event Insegnamento e apprendimento della matematica come un evento etico Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como un evento ético <i>Luis Radford</i>	pp. 185–198
La formación de maestros/as y profesores/as de matemática: Conocimiento, procesos de razonamiento y práctica Mathematics teacher education: Knowledge, reasoning processes and practice La formazione di maestri e professori di matematica: Conoscenza, processi di ragionamento e pratica <i>Salvador Llinares</i>	pp. 199–214
RECENSIONI	pp. 215–225

Dedication

Bruno D'Amore

Our journal deals with didactics, epistemology, and dissemination of mathematics. This issue is dedicated to some friends who have left us in recent months, friends whose scientific relevance in one or more of these domains has been exemplary and will forever be a point of reference for us and for future generations.

Ubiratan D'Ambrosio, creator of ethnomathematics, interpreter of the mathematics education in a social and ethical key, scholar of the history of mathematics.

Giulio Giorello, epistemologist of mathematics, analytical interpreter of the philosophy and the history of mathematics, scholar of the history of science also in social explications.

Nadine Labeque Brousseau, the first primary school teacher to introduce the idea of didactic situation, helping to create the theory that is the historical basis of the creation of the discipline that today goes by the name of didactics of mathematics.

Emilio Pasquini, professor of Italian literature, one of the most significant interpreters in the world of Dante's verses, attentive to the scientific references (especially mathematical ones) contained in them.

Gérard Vergnaud, one of the creators of the theories of didactics of mathematics who founded the discipline, especially the theory of conceptual fields, very significant in the world of research.

La nostra rivista si occupa di didattica, epistemologia e divulgazione della matematica. Questo numero   dedicato ad alcuni amici che ci hanno lasciato negli ultimi mesi, amici la cui rilevanza scientifica in uno o pi  di questi domini   stata esemplare e per sempre costituir  un punto di riferimento per noi e per le generazioni future.

Ubiratan D'Ambrosio, creatore dell'etnomatematica, interprete della didattica della matematica in chiave sociale ed etica, studioso di storia della matematica.

Giulio Giorello, epistemologo della matematica, interprete analitico della filosofia e della storia della matematica, studioso di storia della scienza anche nei suoi risvolti sociali.

Nadine Labeque Brousseau, prima docente di scuola primaria a introdurre l'idea di situazione didattica, contribuendo a crearne la teoria che   alla base storica della creazione della disciplina che oggi va sotto il nome di didattica della matematica.

Emilio Pasquini, docente di letteratura italiana, interprete fra i più significativi al mondo dei versi di Dante, attento ai riferimenti scientifici (specie matematici) in essi contenuti.

Gérard Vergnaud, uno dei creatori delle teorie di didattica della matematica che hanno fondato la disciplina, in particolare la teoria dei campi concettuali, molto significativa nel mondo della ricerca.

Nuestra revista se centra en didáctica, epistemología y divulgación de la matemática. Este número está dedicado a algunos amigos quienes en los últimos meses nos dejaron, amigos cuya relevancia científica, en uno o en más de estos dominios, fue ejemplar y constituirá para siempre un punto de referencia para nosotros y para las generaciones futuras.

Ubiratan D'Ambrosio, creador de la etnomatemática, intérprete de la didáctica de la matemática en clave social y ética, estudioso de la historia de la matemática.

Giulio Giorello, epistemólogo de la matemática, intérprete analítico de la filosofía y de la historia de la matemática, estudioso de historia de la ciencia incluso en sus aspectos sociales.

Nadine Labeque Brousseau, primera docente de escuela primaria a introducir la idea de situación didáctica, contribuyendo a crear la teoría que está a la base histórica de la creación de la disciplina que hoy se conoce bajo el nombre de didáctica de la matemática.

Emilio Parquini, docente de literatura italiana, intérprete entre los más significativos a nivel mundial de la obra de Dante, atento a las referencias científicas (en particular en relación con la matemática) que toda la obra de Dante tiene.

Gérard Vergnaud, uno de los creadores de las teorías de didáctica de la matemática que fundaron la disciplina, en particular la teoría de los campos conceptuales, teoría de gran importancia en el mundo de la investigación.

Editoriale

Bruno D'Amore

Nel 1984 nacque presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica; fu subito aperto a (pochi) insegnanti universitari (a quei tempi non tutti vedevano di buon occhio l'intrusione di questioni aventi a che fare con insegnamento e apprendimento in un tempio universitario, specie poi se si aveva la sfrontatezza di dichiarare che si tratta di una disciplina scientifica a sé stante) e a parecchi docenti di scuola. Vennero subito chiamati a farne parte docenti di tutti i livelli scolastici, dalla scuola dell'infanzia (che allora si chiamava materna) alla scuola secondaria superiore. Tutt'oggi il NRD esiste e ha basi solide, ne sono il co-direttore scientifico (insieme al collega prof. Paolo Negrini) e vanta oltre 40 ricercatori, moltissimi dei quali PhD, con parecchi stranieri.

Il successo delle iniziative di ricerca e di diffusione della disciplina presso gli insegnanti di varie regioni d'Italia fu tale che, nel 1986, si decise di raccogliere gli insegnanti in un convegno nazionale che si chiamò *Incontri con la matematica*, il cui scopo dichiarato era quello di diffondere idee matematiche il più possibile corrette, ma con attenzioni speciali e particolarmente concrete alla ricerca in didattica della matematica (ricerca neonata) e alla critica alle situazioni d'aula (come le chiamai). E siccome era l'epoca nella quale tanto si parlava di relazioni fra la matematica e le strategie di gioco, il primo convegno ebbe come tema: *Gioco e Matematica*. I relatori erano tutti docenti di matematica per lo più universitari. Il convegno ebbe il numero cardinale zero, non avendo assolutamente pensato alla possibilità che si potesse replicare negli anni successivi. E si svolse a Bologna, in un'immensa sala (strapiena di convegnisti) dell'Istituto Aldini-Valeriani, gentilmente messo a disposizione dal Comune di Bologna. Visto il successo inaspettato, si decise di proseguire, cambiando sede; e, come molti lettori sapranno, oggi, novembre 2021, siamo al convegno IcM che ha numero ordinale 35, dunque il trentaseiesimo convegno, che ha assunto la denominazione ufficiosa di "convegno di Castel san Pietro Terme", dato che si svolge in questa incantevole città, nei pressi di Bologna, dal 1987. Un convegno del quale si sono sempre pubblicati gli Atti cartacei, disponibili sempre, fin dal primo giorno, dall'inaugurazione.

Visto l'interesse profondo per queste iniziative, si decise di fondare una rivista destinata a raccogliere riflessioni culturali sulla matematica che potessero essere utili ai docenti di qualsiasi livello scolare, ma anche risultati di ricerca in didattica della matematica e relazioni su attività di matematica che, in aula, avevano avuto successo apprenditivo. Nacque così, nel 1987, questa rivista che si chiamò *La matematica e la sua didattica*. La rivista ebbe

alcuni anni di interruzione, cosicché ora, nel 2021, non siamo al numero ordinale 34, come dovrebbe essere, ma “solo” al 29.

In tutte queste avventure, fu mio straordinario partner come creatore di idee il caro amico e maestro Francesco Speranza, al quale si devono molte delle decisioni iniziali, tutte davvero piene di successo, ampiamente lungimiranti.

La rivista ha sempre pubblicato in italiano; e, così come il nostro NRD ha accolto per seminari e conferenze i più brillanti nomi in campo internazionale, così come il nostro convegno IcM ha ospitato i più celebri studiosi internazionali di didattica della matematica, così la rivista ha potuto pubblicare articoli di autori che senza alcun dubbio posso considerare i massimi studiosi di questo campo. Si è pubblicato in italiano fino a un certo punto per poi passare (dal 2016) a una rivista trilingue, dato che sempre più dall'estero provenivano richieste e sollecitazioni in tal senso.

Storie parziali del convegno e della rivista sono disponibili nei nostri siti:

<http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php>

<https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica/>

<http://www.incontriconlamatematica.net/portale/rivista/>

Il NRD di Bologna prosegue il suo cammino.

Il Convegno IcM dal 2021 ha trovato nella società Formath un formidabile organizzatore.

La rivista ...

Ho dedicato a questa rivista, come il lettore può ben immaginare, moltissime ore della mia vita, da mille punti di vista diversi, con passione e zelo, a volte anche eccessivo. Con la collaborazione di colleghi (soprattutto prestigiosi ex allievi) ho forgiato una rivista degna di questo nome, che so essere letta da molti. In certi anni la rivista è stata a pagamento, arrivando a 4 numeri l'anno, per giungere, da diverso tempo, a essere Open Access e constare di 2 numeri l'anno. Com'è ora.

Ho deciso di chiudere la mia attività in questo versante, affidando la direzione scientifica della rivista a tre colleghi che sono stati tutti miei allievi universitari (in forme diverse) e poi miei allievi di dottorato (anche se non sempre ufficiali), in ordine alfabetico Miglena Asenova, Maura Iori e George Santi. Studiosi che reputo assai più che brillanti sul piano scientifico, attivi nella ricerca in didattica e nella sua divulgazione. So che hanno raccolto e fatto proprio lo spirito iniziale (Francesco Speranza) e attuale e che sapranno assolvere al tremendo e complesso compito che affido loro: la direzione scientifica della rivista che proseguirà trilingue, semestrale e Open Access.

Questo numero della rivista [29(2) 2021] è l'ultimo che mi vede come direttore scientifico; dal prossimo [30(1) 2022] sarò orgoglioso di vedere i loro nomi apparire nella prima pagina come direttori scientifici, al plurale, come vedo che accade in riviste di prestigio internazionale.

A loro sono e sarò sempre debitore dell'aiuto che mi hanno generosamente e ampiamente elargito in questi anni e del fatto che, grazie a loro, questa rivista continuerà a vedere la luce, nella prospettiva iniziale, senza deviazioni: diffondere quella matematica che può essere utile a docenti di qualsiasi livello e soprattutto far conoscere nelle scuole i risultati della ricerca in didattica della matematica.

Análisis a los vectores de la ética comunitaria en una actividad de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Analysis of the vectors of community ethics in a mathematics teaching-learning activity

Analisi dei vettori dell'etica comunitaria in un'attività di insegnamento-apprendimento della matematica

Adriana Lasprilla Herrera

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Resumen. *En este artículo se describen los elementos que se consideran necesarios para la elaboración de una rejilla que permita aproximarse a un seguimiento de la ética comunitaria, a partir del estudio de sus vectores, en actividades de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Se consideran los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como acontecimientos sociales que ocurren en la práctica humana concreta, como sugiere la teoría de la objetivación. En este marco de interpretación, la ética resulta ser un elemento ineludible de considerar. Nuestro argumento reposa en una concepción dialéctica materialista de las matemáticas y en una concepción postmoderna de la ética en la que ésta aparece como la forma de la relación al otro (la forma de la alteridad), forma que se revela continuamente en la cotidianidad de la acción de los sujetos. Este artículo inicia con una introducción en la que se esbozan algunas ideas sobre la importancia de la ética en la educación matemática. Posteriormente, se proponen algunos aspectos teóricos desde los planteamientos de Lévinas y la teoría de la objetivación. A continuación, se expone una propuesta de rejilla para el seguimiento de los vectores de la ética comunitaria, junto con un ejemplo de aplicación de la rejilla y, finalmente, algunas reflexiones sobre ética y educación matemática.*

Palabras claves: ética comunitaria, vectores ética comunitaria, actividad, alteridad.

Abstract. *In this article we describe the elements considered necessary for the elaboration of a grid that allows us to approach a monitoring of community ethics from the study of its vectors, in mathematics teaching-learning activities. We consider mathematics teaching-learning processes as social events occurring in concrete human practice, as suggested by the theory of objectification. In this framework of interpretation, ethics turns out to be an unavoidable element to be considered. Our argument rests on a dialectical materialist conception of mathematics and on a postmodern conception of ethics in which ethics appears as the form of the relation to the other (the form of otherness), a form that is continuously revealed in the everyday action of the subjects. This article begins with an introduction where some ideas*

about the importance of ethics in mathematics education are outlined. Subsequently, some theoretical aspects are proposed from Lévinas' approaches and the theory of objectification. Next, the paper presents a proposed grid for monitoring the vectors of community ethics together with an example of application of the grid and, finally, some reflections on ethics and mathematics education.

Keywords: community ethics, vectors, activity, otherness.

Sunto. *In questo articolo descriviamo gli elementi che si considerano necessari per l'elaborazione di una griglia che ci permette di avvicinarci a un monitoraggio dell'etica comunitaria a partire dallo studio dei suoi vettori, nelle attività di insegnamento-apprendimento della matematica. Consideriamo i processi di insegnamento-apprendimento della matematica come eventi sociali che si verificano nella pratica umana concreta, come suggerito dalla teoria dell'oggettivazione. In questo quadro di interpretazione, l'etica risulta essere un elemento inevitabile da considerare. La nostra argomentazione poggia su una concezione materialista dialettica della matematica e su una concezione postmoderna dell'etica in cui l'etica appare come la forma della relazione con l'altro (la forma dell'alterità), una forma che si rivela continuamente nell'azione quotidiana dei soggetti. Questo articolo inizia con un'introduzione in cui si delineano alcune idee sull'importanza dell'etica nell'educazione matematica. In seguito, vengono proposti alcuni aspetti teorici a partire dagli approcci di Lévinas e dalla teoria dell'oggettivazione. In seguito, l'articolo presenta una proposta di griglia per il monitoraggio dei vettori dell'etica comunitaria insieme a un esempio di applicazione della griglia e, infine, alcune riflessioni sull'etica e l'educazione matematica.*

Parole chiave: etica comunitaria, vettori, attività, alterità.

1. Introducción

Uno de los intereses más recientes en educación matemática es la exploración de la naturaleza ética de las relaciones entre profesores y estudiantes en el aula (Boylan, 2013; D'Ambrósio & D'Ambrósio, 2006; Radford & Lasprilla Herrera, 2020; Radford & Silva Acuña, 2021). Este interés ha llevado a la emergencia de propuestas investigativas que buscan comprender de mejor manera el funcionamiento de la ética y la incidencia de su consideración en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En éste documento se explora una de estas propuestas, que tiene su fundamento en los principales planteamientos de la teoría de la objetivación. Además, se enmarca en los estudios del Doctorado Interinstitucional en Educación que me encuentro desarrollando.

Para la teoría de la objetivación (TO), la ética comunitaria se concibe como una forma de relación al otro, esto quiere decir que en el desarrollo de procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se pueden evidenciar diversas formas de relación al otro; pero, dentro de esta multiplicidad de formas, las que interesan estudiar en la TO son aquellas que se fundamentan

en la solidaridad, el cuidado del otro y la responsabilidad.

De modo que para evidenciar la ética comunitaria se proponen tres vectores: la responsabilidad, el cuidado del otro y el compromiso en el trabajo conjunto. Estos vectores toman vida dentro de actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Teniendo presente que la palabra actividad toma una connotación particular en el marco de la TO.¹

Por otra parte, es necesario mencionar que particularmente desde la teoría de la objetivación los procesos de enseñanza-aprendizaje deben plantearse desde la constitución histórica y cultural de los sujetos, porque el aprendizaje no es un estado ni debe entenderse como tal. Por el contrario, el aprendizaje es y debe ser interpretado como un proceso de transformación, tal como lo afirmó Radford (2017), “(...) el aprendizaje se teoriza como procesos de objetivación, es decir, aquellos procesos sociales de volverse, progresiva y críticamente, consciente de una forma codificada de pensamiento y de acción” (p. 123). De conformidad con lo expuesto, se advierte que lo que propone la TO es repensar la educación matemática retomando las dimensiones ética, histórica y cultural (Radford, 2017), posibilitando que la visión de la educación matemática contemple tanto la dimensión del ser como del saber, a partir de los constructos teóricos propuestos desde el materialismo dialéctico por diversos autores como los filósofos George Hegel y Karl Marx, y también los psicólogos Lev Vygotsky y Alexei Leóntiev.

El análisis que se propone tiene como objetivo dar cuenta de los vectores de la ética comunitaria en actividades de enseñanza-aprendizaje de matemáticas, en tareas de generalización de patrones. Tomando en cuenta que los procesos vinculados con aspectos éticos no se desarrollan de manera natural, es decir, no emergen espontáneamente en el aula, sino que, por el contrario, su manifestación requiere una intervención pedagógica precisa (Radford, 2018; Radford & Lasprilla Herrera, 2020). Siendo consecuentes con la necesidad de propuestas pedagógicas que permitan desarrollar aspectos éticos en el aula de matemáticas, se realizó una intervención en el aula; para el análisis de la información de la investigación se propuso una rejilla que consideró los vectores de la ética comunitaria, junto con indicadores que permitieron su identificación y seguimiento. El proceso metodológico que se siguió en la investigación, como fundamento de este escrito, tiene principios histórico-culturales y multisemióticos. Por lo tanto, los análisis desarrollados en este estudio se han constituido en la medida en que se ha ido avanzando en la comprensión de los datos.

Este artículo plantea los fundamentos necesarios para la elaboración de una rejilla que se interesa por capturar la emergencia de la ética comunitaria en

¹ La actividad de enseñanza-aprendizaje “es práctica, sensual, sensible y material”, es el nombre técnico de un proceso colectivo sin fin a través del cual cada persona se inscribe cotidianamente en el mundo histórico-cultural (Radford, 2018).

actividades de enseñanza-aprendizaje de matemáticas, y está organizado de la siguiente manera: en el segundo apartado se proponen algunas de las principales ideas del filósofo Lévinas; en tercer lugar, se establecen algunos aspectos de la TO y los principales elementos necesarios para la constitución de la rejilla; en la cuarta parte se plantea la constitución de la rejilla; en el quinto se da un ejemplo de implementación de la rejilla en un conjunto de datos; por último, en el apartado seis se proponen algunas reflexiones sobre ética y educación matemática.

2. Planteamientos éticos en Lévinas

El filósofo Lituano Emanuel Lévinas (1096 – 1995) es conocido por haber sido formado en la corriente filosófica de la fenomenología, pero a lo largo de su producción intelectual deja en evidencia su ruptura con la filosofía occidental, estableciendo la ética como filosofía primera (Mélich & Barcena, 2000; Ernest, 2019). Lévinas como se cita en Vila (2004) considera que “la exigencia ética no emerge del yo, sino del otro o la otra cuya presencia nos obliga” (p. 54). En este sentido, para Lévinas el principio filosófico es el prójimo; su pensamiento se fundamenta desde la responsabilidad por el otro y su acogida en la apertura, siendo esta la “vía para conocerse a uno mismo y afirmarse como individuo en el mundo” (Quintero, 2014, p. 6).

La relación fundamental y asimétrica es la que se da con el otro o la otra como otro diferente, el cual, desde su misma presencia, nos solicita y nos afecta. Es por eso que nuestro yo se define desde nuestra responsabilidad para con los demás. (Lévinas, 1991, como se cita en Meza-Rueda, 2012, p. 220)

En *Ética e infinito*, Lévinas (1991) como se cita en Meza-Rueda (2012) afirmó que “desde el momento en que el otro me mira yo soy responsable de él sin siquiera tener que tomar responsabilidades en relación con él; su responsabilidad me incumbe. Es una responsabilidad que va más allá de lo que hago” (p. 220). De acuerdo con esto, el problema de la historia sería la abstracción del otro bajo la falacia de la supremacía de la individualidad del yo. Desde estos planteamientos hechos por Lévinas se puede caracterizar la acción educativa como una relación de alteridad, una relación con el otro, y a la ética como responsabilidad y hospitalidad.

Para entender la ética de Lévinas se debe tener en cuenta que este filósofo consideró que la experiencia originaria del ser es el encuentro humano; por lo que los seres humanos encuentran el mayor sentido de la vida en las relaciones que establecen con otros seres humanos (Nodari, 2010). Para el filósofo lituano el “otro” es la única posibilidad que tiene el “yo” para superar su inclinación narcisista. Por ello, la ética de Lévinas no es una ética de reciprocidad, sino una ética asimétrica en donde el yo se encuentra en un constante interés de asimilar al otro.

En el texto, el filósofo expuso, además, que “la responsabilidad no es, de hecho, un simple atributo de la subjetividad, como si esta ya existiera en sí misma, antes de la relación ética. La subjetividad no es para sí misma; es, una vez más, inicialmente para otro” (Lévinas, 1991, p. 92–93). De tal modo, se puede decir que para Lévinas (1991), la ética es comprendida como responsabilidad, en particular la que emerge inicialmente en el otro y luego en uno mismo.

Para Radford (2021), los planteamientos éticos de Lévinas se distancian de las corrientes que son contemporáneas al filósofo lituano, pero también señala que la metafísica ética propuesta por Lévinas sigue siendo una filosofía del sujeto esencialmente cartesiana, aunque con un contenido ético diferente.

Según Radford (2021), además, en los planteamientos de Lévinas no es evidente una mediación socio-histórica intrínseca; es decir, hay un interés por el otro, pero este otro es individual, no un sujeto que pertenece a una comunidad y que mediante ella se constituye. Por tanto, a partir de algunos planteamientos de Lévinas y con el interés de proponer intervenciones pedagógicas que resalten los aspectos éticos en el aula de matemáticas, se tomó el marco de la TO, en específico, la del constructo de la ética comunitaria para la propuesta de rejilla de la ética comunitaria y su posterior análisis.

2.1. Ética comunitaria en la teoría de la objetivación

La TO coincide con varias ideas de Lévinas, pero la postura ética que propone difiere, en algunos aspectos, con la propuesta hecha por el pensador lituano. La principal distinción está en que para la TO las condiciones sociales e históricas particulares son parte fundamental de un verdadero encuentro con el otro. De esta forma, la ética trasciende a la relación yo y el otro; asimismo, se constituye como una fuerza liberadora que debe apoyar a los sujetos para enfrentar las realidades históricas, políticas y económicas (Radford, 2021).

A partir de este distanciamiento que toma la TO de la propuesta de Lévinas, es posible identificar que la ética propuesta por Radford es una ética de la liberación, que se fundamenta en la idea de liberación planteada por Freire (2004), la cual se preocupa por reconocer el modo en que se vive, pero aún más importante, visualizar cómo se podría vivir.

Como se mencionó en la introducción de este estudio, la TO considera la ética comunitaria como la forma de la relación al otro, fundamentándose en una relación de alteridad y liberación. Este modo de relación se caracteriza por promover formas de interacción humana impulsada por el compromiso, la responsabilidad y el cuidado. La ética comunitaria conceptualiza al sujeto a partir de una relación de alteridad que se fundamenta en el otro, un otro con un marco histórico y cultural que lo constituye y que, por tanto, le posibilita un ejercicio de liberación. Igualmente, se basa en un concepto dialéctico-materialista del yo, en el que el concepto del yo reconoce tanto la naturaleza

cultural-histórica de lo humano como la naturaleza política que irradia de la educación y el papel crucial que esta tiene en la transformación de la sociedad (Freire, 1993; Vygotsky, 1934/1993).

La ética comunitaria está volcada hacia la constitución reflexiva y crítica de lo que Marx (1988) llamó “poderes humanos” (p. 108), tales como la voluntad, el amor, la cooperación y la solidaridad, es decir, todas aquellas capacidades que afirman la naturaleza social, cultural e histórica de los individuos y donde sus relaciones con los demás se convierten en la condición ontológica de la existencia del ser humano. Esta ética también se basa en el reconocimiento del origen histórico, cultural y material del ser humano, e incorpora y refracta visiones y concepciones dinámicas y antagónicas del mundo y de lo que puede significar una vida buena (Radford, 2021).

Para comprender de mejor manera el concepto de ética comunitaria es necesario definir la noción de aprendizaje, el cual, para la TO aparece como un esfuerzo colectivo, dado que el conocimiento emerge de forma comunal entre los profesores y los alumnos en lo que se ha denominado la labor conjunta. Específicamente, la labor conjunta contempla, de manera simultánea, los procesos de enseñanza y aprendizaje, solo que no se consideran dos procesos paralelos, lo que quiere decir que no se da la enseñanza por un lado y el aprendizaje por otro, sino que existe un único proceso, llamado el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La ética comunitaria desempeña un papel fundamental en el concepto de la labor conjunta, siendo esta el lugar donde toman sentido los procesos de enseñanza-aprendizaje. Este papel es importante, ya que la existencia de la labor conjunta depende de la existencia de la ética comunitaria. En otras palabras, cuando las formas de relación al otro se fundamentan en otros tipos de éticas, diferentes a la ética comunitaria, la labor conjunta no emerge, es decir, que al no estar presente la ética comunitaria lo que se desarrolla son actividades de enseñanza-aprendizaje que carecen del sentido colectivo y solidario que distingue a la labor conjunta.

La ética comunitaria se configura a partir de tres vectores que constituyen la estructura esencial de la subjetividad, estos son: la responsabilidad, el compromiso hacia los demás y el cuidado del otro. En la elaboración de la rejilla para cada uno de los vectores se consideró necesario asociarlo a un componente que se vinculara con los planteamientos de Lévinas y que permitiera, a su vez, formular un indicador que mostrara su presencia en una relación durante el desarrollo de una clase de matemáticas.

Para la constitución de la rejilla de seguimiento a la ética comunitaria fue necesario considerar elementos de la TO y algunas ideas de Lévinas. El primer momento en la elaboración de la rejilla consistió en identificar los constructos teóricos que permitirían dar seguimiento a los vectores de la ética comunitaria; posterior a ello, se plantearon los posibles indicadores que permitirían dar seguimiento a cada uno de los elementos de la rejilla. A continuación, se envió

la rejilla a dos expertos en el marco teórico de la TO y de las ideas de Lévinas, para que, según su criterio, evaluaran la pertinencia o no de los aspectos considerados en la rejilla y compartieran los ajustes que juzgaran necesarios. El último momento en la elaboración de la rejilla fue incorporar las sugerencias de los expertos y aplicarla en el conjunto de datos disponible. En el proceso de elaboración se tuvo en cuenta que los elementos considerados para el seguimiento de la ética comunitaria no son producto de la evolución natural, sino que son elementos que le dan forma a la relación de alteridad y son producidos históricamente. En el siguiente apartado se describen los principales aspectos de interpretación para cada uno de los vectores de la ética comunitaria.

2.2. *El vector responsabilidad*

En los planteamientos de Lévinas (2002), la ética se concibe como un modo de relación con los otros, pero especialmente como una relación de no indiferencia frente al sufrimiento de la víctima. En esa medida, la responsabilidad toma un carácter particular, donde no puede ser transferible de un sujeto a otro y tampoco puede ser reemplazable: si el yo en realidad quiere ser yo tiene que empezar por darse al otro, porque es la responsabilidad por el otro lo que lleva a un sujeto a producir su yo; por lo tanto, lo que le da sentido al yo es precisamente el otro. Por esto, el yo debe preocuparse por el otro, al fin y al cabo, hay yo porque hay responsabilidad, pues el yo es el resultado de que nos hayan cuidado, y gracias a esto puede sentirse insustituible y único (Romero & Gutierrez, 2011). De la manera en que Lévinas plantea la relación con el otro “se desprenden dos piezas de la comprensión de la alteridad, a saber: el rostro del otro como escenario de una llamada ética y la responsabilidad como respuesta a dicha llamada” (Quintero, 2014, p. 6).

[El filósofo Lévinas (2002, 2006)] comenzó asumiendo las exigencias de la fenomenología y del existencialismo en las cuales se analiza el existir humano, pero las trascendió al considerar que el existir no es simplemente comprender el ser de forma teórica, sino comprometerse en toda la actividad que se es. (Daros, 2001, p. 21)

Entonces, “pensar ya no es contemplar, sino comprometerse, estar englobado en aquello que se piensa, estar embarcado: acontecimiento dramático de estar-en-el-mundo” (Lévinas, 2002, p. 264–265). Es importante advertir que el hombre o mujer es responsable por todo otro hombre o mujer, pero no porque él o ella lo deciden, sino porque esa debe ser su naturaleza: solo así es humano. Esta responsabilidad va más allá de las intenciones propias (Lévinas, 2002).

El vector responsabilidad se interpreta como una solicitud ética, un gesto que parte de la conceptualización de la fragilidad humana, esto es de reconocer la propia fragilidad que se tiene a través de la fragilidad del otro para así poder

entenderlo, al mismo tiempo, en su singularidad. La responsabilidad es también una llamada silenciosa que se expresa en la respuesta del llamado del otro, mediante su unión, nexo o vinculación; por tanto, puede ser entendida como un enlace con el prójimo que habla de lo que no es el yo, en palabras de Lévinas, es el rostro del otro.

La responsabilidad no se plantea en términos de simetría, sino en términos de asimetría y de prioridad ética del otro que se tiene a cargo. Una persona se considera responsable no porque se justifica por sí misma o desde sí misma, sino por responder, atender, cuidar o estar al servicio del otro; tampoco es una persona responsable aquella que se toma su vida como proyecto y se sitúa como soberano autónomo en el mundo, sino el que se desvive y entiende su autonomía como heterónoma (Moratalla, 2014). En este punto es importante resaltar que el objeto de la responsabilidad no es únicamente el otro, sino también la condición vulnerable de la humanidad. Por ende, a partir de estos planteamientos, se consideran como componentes del vector responsabilidad la excedencia y la acogida (hacerse cargo), las cuales se explican a continuación.

El primero es un concepto que Lévinas describió cómo el movimiento que conduce a un existente hacia el bien, no como una trascendencia por medio de la cual el existente se eleva a una existencia superior, sino una salida del ser y de las categorías que lo describen (Lévinas, 2006). Esta palabra denota, a la vez, la salida del sí y el deseo por el “otro”. En palabras de Domínguez (2005), la excedencia es “el hecho por el cual la existencia se “desborda” fuera de los parámetros del existente. Así, encontramos que la excedencia se encuentra en el centro del ser o, mejor aún, es una necesidad que nos devela el mismo ser” (p. 122).

La acogida es un concepto que está relacionado con hacerse cargo de otro. Desde que un ser llega al mundo con un cuerpo, una cultura y una lengua, es recibido por alguien más; la acogida es esa apertura al otro que demanda una respuesta que debe estar a la altura de sí. Tal como lo diría Innerarity (2008), “la vulnerabilidad humana se debe fundamentalmente al hecho de que la vida buena necesita de bienes relacionales, de objetos exteriores que reciban la actividad excelente, de otros sujetos que estén presentes para recibir la oferta de hospitalidad” (p. 54). De modo que el vector responsabilidad, que se propone en la rejilla de seguimiento de la ética comunitaria, está conformado por dos componentes principales: la excedencia y la acogida.

2.3. El vector cuidado del otro

Este vector parte de una idea principal en la que el cuidado de sí pasa primero por el cuidado y la preocupación por el otro; esto es así porque considerar en primacía al otro brinda al yo la posibilidad de verse a sí mismo reflejado en el otro. De esta manera, Lévinas rompió con el esquema sujeto-objeto que había sostenido la metafísica de la filosofía occidental y postuló un nuevo esquema:

yo-otro, donde se descentraliza el yo y la conciencia en la medida en que el yo se debe al otro, y es el otro quién constituye ese yo.

Reconocer al otro como primacía permite reconocer la vulnerabilidad propia y la del otro; sentir la empatía que le habla al yo y lo invita al otro, así como entender que las necesidades del otro no son naturales, sino formas de relación con el otro que han sido producidas en el curso del tiempo. A partir de estas interpretaciones emerge el vector cuidado del otro, en donde el nodo de su concepción está la idea de socialidad propuesta por Lévinas (2006), la cual se interpreta como un nivel de acercamiento al otro que es más superficial que la proximidad; en la proximidad se está siendo responsable del otro, y en la socialidad hay una relación entre pensantes únicamente.

De acuerdo con estos planteamientos, se consideran la inmanencia y el encuentro como componentes del vector cuidado del otro. La inmanencia es la suficiencia para sí; se trata como si el pensamiento pensara a su medida en virtud del hecho de poder – encarnado – reunir aquello que piensa. Según Viveros y Vergara (2014) el pensamiento y el psiquismo de la inmanencia son:

La noción de encuentro es una clara referencia a la relación hombre a hombre, una disposición a la bondad y a la acogida, las cuales se alejan de toda pretensión de subordinación o de tiranía. El otro en Lévinas es una exterioridad, por lo tanto, se considera una evasión de sí mismo, una salida de la mismidad, una negación de la violencia brutal que ejerce el deseo de dominio, para reemplazarlo por el éxtasis del encuentro y del amor que este propicia. (Viveros & Vergara, 2014, p. 66)

Para Lévinas el encuentro con el otro se define a partir del diálogo, por lo que en la elaboración de la rejilla el componente es nombrado encuentro (diálogo), ya que hay una relación cercana entre estos dos conceptos. El encuentro en el diálogo precede a la unidad de la autoconciencia. Bajo ese entendido, el diálogo significa proximidad y no por alguna voz sobrenatural que viniera a mezclarse en la conversación o por algún prejuicio; es la no indiferencia y el sentimiento desinteresado, aun así, Lévinas reconoce que este puede degenerar en odio. Sin embargo, en su sentido originario, el diálogo es, ante todo, ocasión para el bien; “El diálogo de la trascendencia es donde se alza la idea del bien por el hecho mismo, únicamente, de que, en el encuentro, el otro cuenta por encima de todo” (Merino, 2004, p. 1).

El diálogo en Lévinas se distingue entre el hablar o decir, y se diferencia contundentemente de lo dicho, porque este ya es una puesta en escena de los prejuicios que anticipan la experiencia del otro, a partir de lo cual el otro jamás es otro. Entonces, el verdadero diálogo está fundado en esta distancia entre ipseidades, debido a que a partir del diálogo (encuentro) se da la proximidad entre ellas, sin que se despliegue la violencia y, de esa forma, el lenguaje no tiene como fin expresar los estados de conciencia.

2.4. El vector compromiso en el trabajo conjunto

El vector compromiso en el trabajo conjunto se vincula de manera nodal con lo que para Lévinas es la sensibilidad. El sentido que Lévinas le otorgó al estatuto originario de la subjetividad sitúa al sujeto a nivel de la sensibilidad, en la medida en que escucha atentamente la exigencia del otro, antes de que se dé cualquier apertura y relación intencional, puesto que, en efecto, “el prójimo me concierne antes de toda asunción, antes de todo compromiso consentido o rechazado (...) me ordena” (Lévinas, 2002, p. 148).

En el trabajo conjunto, el vector compromiso es entendido como el ofrecimiento de hacer todo lo posible en el curso de la actividad. El compromiso es, por tanto, una actitud y un compromiso de “voy a estar” y “voy a hacer lo posible y lo imposible” para desarrollar de la mejor forma la actividad conjunta. Para dar cuenta de ello, es necesario que cada uno de los involucrados en la actividad tenga la confianza para expresar, con toda naturalidad, si no ha entendido o si no está de acuerdo. Cabe aclarar que aquí el objetivo no es llegar a acuerdos, sino entender al otro en su singularidad y en su diferencia. Teniendo en cuenta estas ideas, se consideran como componentes del vector compromiso en el trabajo conjunto: la proximidad (empatía) y la exposición.

“La proximidad no remite a la intencionalidad o al hecho del que el otro sea conocido para el yo, porque esa pretensión reduce la capacidad de acogida y la respuesta hospitalaria” (Jaramillo, Jaramillo, & Murcia, 2018, p. 11), al centrarse en el conocimiento y no en la sensibilidad. Este no puede ser “intencionado porque no puede ser previsto, sino que, más bien, es todo un acontecimiento que desnaturaliza lo común del mundo y des-apalabra lo ya conocido de ante mano” (Jaramillo et al., 2018, p. 4; Farías, 2015). La proximidad habla de acoger al otro desde la sensibilidad y el reconocimiento de la vulnerabilidad propia y del otro.

La exposición es interpretada desde el decir, un ofrecimiento que consiste en más que transmitir información o establecer la intención de hacer pasar los pensamientos a otro. Decir significa acercarse al otro y, más aún, responder por él; es una orientación original, esta es la condición de posibilidad de la comunicación. Para Lévinas el decir se entiende en cuanto “exposición”.

Cabe recordar que el interés de este documento está en mostrar el seguimiento a los vectores de la ética comunitaria en una actividad de enseñanza-aprendizaje. También que la información relacionada en este escrito corresponde a una parte del trabajo desarrollado en la tesis doctoral titulada *Constitución Dialéctica de los Procesos de Objetivación y Subjetivación con una Ética Comunitaria, en Actividades Desarrolladas al Abordar Tareas de Generalización de Patrones*. A continuación se presenta la versión final de rejilla que se utilizó, junto con la aplicación de esta en una de las actividades que se desarrollaron en el marco de la tesis doctoral mencionada.

3. Propuesta de rejilla seguimiento de la ética comunitaria

Los datos sobre los que se empleó la rejilla se obtuvieron de la aplicación de seis tareas a un grupo de estudiantes entre 9 y 10 años en un colegio público en Bogotá, Colombia, durante los años 2018 y 2019. Las sesiones de aplicación de las tareas desarrolladas con los niños fueron grabadas por audio y video; posterior a su grabación, los audios y videos fueron transcritos para luego segmentar las transcripciones, a partir del seguimiento de los modos de interacción y las formas de producción de saber (Lasprilla Herrera, 2021).

Teniendo presentes los planteamientos de la TO, en la actividad se pueden dar dos tipos de relaciones, a saber: i) los modos de interacción que hacen referencia a las formas históricas y culturales de interacción y cooperación entre los sujetos, y ii) los modos de producción del saber que hacen referencia a los medios materiales e intelectuales que emplean los miembros de una cultura en la producción y la reproducción de su vida. Tanto las formas de producción del saber como los modos de interacción social están íntimamente relacionados con los procesos de objetivación y subjetivación (Radford, 2013).

Ahora bien, para hablar de actividad es necesario partir del hecho de que toda actividad en el aula tiene un objeto, el cual es planteado para los procesos de objetivación y para los de subjetivación. Cada uno de estos procesos está íntimamente relacionado con los tipos de relaciones establecidas en la actividad. Por ello, los procesos de objetivación se vinculan con los modos de producción de saber, mientras que los procesos de subjetivación se conectan con los modos de interacción social (Lasprilla Herrera & León, 2020). En el caso de esta investigación, el objeto de la actividad para los procesos de objetivación está relacionado con la capacidad que tienen los estudiantes de pensar algebraicamente al abordar situaciones de generalización de patrones (secuencias figurales). El objeto para los procesos de subjetivación se refiere a propiciar un esfuerzo dinámico, político, social, histórico y cultural que busque la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas, que se constituyen cultural e históricamente y se hallan en una evolución permanente (Radford & Lasprilla Herrera, 2020). La actividad, de la forma como es entendida en el marco de la teoría de la objetivación, plantea la emergencia de procesos de objetivación y subjetivación, que se fundamentan en las relaciones que se establecen con los otros, en las cuales existen actitudes éticas subyacentes.

En el proceso de caracterización de la actividad (que no se describe en este análisis y que hace parte de la tesis de la que se desprende este documento) fue posible distinguir algunos segmentos dentro del conjunto de datos, donde se pudieron identificar modos de interacción y formas de producción del saber acordes con los objetos trazados para los procesos de objetivación y subjetivación. Para la implementación de la rejilla fue necesario el uso del programa Nvivo, y mediante su uso se hicieron marcas en los segmentos de las transcripciones, identificados durante la caracterización de la actividad. De

esta manera, se identificaron los segmentos que daban muestras de presencia de los vectores de la ética comunitaria.

La elaboración de la rejilla pasó por varios momentos, aunque solo se mencionan los tres principales. El primer momento está conformado por la revisión teórica que permitió la extracción de conceptos clave para la conceptualización de la ética desde los planteamientos de Lévinas y la TO; el segundo momento consistió en la validación interna y externa de la rejilla. La interna de parte de los directores asesores de esta tesis, y la externa de pares y expertos en el campo. El último momento consistió en la aplicación de la rejilla, utilizando una validación empírica, donde se aplicó la rejilla a algunos datos para establecer la consistencia de la estructura propuesta en ella. En la validación externa de la rejilla, y por sugerencia de uno de los revisores, se decidió omitir como componentes *bondad* y *compasión*, por la dificultad que implica realizarles un seguimiento a partir de una rejilla.

A partir de los aspectos descritos se establecieron los elementos que sirvieron de base para la constitución de la rejilla, estos fueron: sustrato ético, relacionado con los aspectos filosóficos que contienen de manera macro los principales aspectos de los vectores de la ética comunitaria, los cuales son responsabilidad, compromiso en el trabajo conjunto y cuidado del otro. Y los componentes para cada uno de los vectores de la ética comunitaria son, para la responsabilidad: la excedencia y la acogida (hacerse cargo); para el cuidado del otro: la inmanencia y el encuentro-diálogo; y para el compromiso en el trabajo conjunto: la proximidad (empatía) y la exposición. También se consideró la relación de alteridad, “otredad”, como un elemento transversal que está presente en cada uno de los componentes de la ética comunitaria (ver Tabla 1).

Tabla 1

Aspectos de la ética comunitaria en la actividad

Sustrato ético	Vector ética comunitaria	Componente
Responsabilidad	Responsabilidad	Excedencia y acogida-hacerse cargo
Socialidad	Cuidado del otro	Inmanencia y encuentro-diálogo
Sensibilidad	Compromiso en el trabajo conjunto	Proximidad (empatía) y exposición

A partir de los aspectos considerados en la Tabla 1 se formularon los indicadores para cada uno de los componentes, teniendo presente que los indicadores fueran observables en un salón de clases (ver Tabla 2).

Tabla 2

Indicadores por vector y componente

Sustrato ético	Vectores ética comunitaria	Componentes	Indicadores (acciones)	
Responsabilidad	Responsabilidad	Otriedad	Excedencia	Los estudiantes asumen posicionamientos que les permiten *hacer frente a las dificultades. *Muestra compromiso con el trabajo. *Muestra responsabilidad por el otro, quedándose y escuchando sus ideas.
			Acogida (hacerse cargo)	*Se interesa por la comprensión o no de los compañeros. *Ofrece su ayuda. *Se muestra dispuesto a atender a sus compañeros. *Valora los esfuerzos de los demás y el propio.
Socialidad	Cuidado del otro		Inmanencia	*Prevalcen sobre el otro las ideas y pensamientos propios. *Reconoce la existencia del otro, pero desde el yo creo, yo pienso, yo considero.
			Encuentro - diálogo	*Muestra respeto por lo que hacen o dicen los demás. *Maneja con respeto y responsabilidad el poder. *Es capaz de cambiar sus concepciones sobre sus habilidades y las de sus compañeros. *Trata de atender una idea o acción propuesta por otro. *Felicit a otros por los aportes. *Es capaz de sacar cosas positivas de experiencias y eventos difíciles.
Sensibilidad	Compromiso en el trabajo conjunto		Proximidad	*Muestra interés por estar al lado de otro por gusto propio. *Les pide participación a los que no hablan mucho. *Se muestra atento (a) a prestar ayuda a quien lo necesite. *Usa una actitud positiva, motivando o animando a los compañeros.
			Exposición	*Propone abiertamente ideas y comprensiones. *Maneja sus emociones para el desarrollo del trabajo en cooperación. *Se pone en el lugar del compañero para apoyarlo y guiarlo.

Con los elementos de este instrumento de análisis propuesto se realizó la revisión de las actividades obtenidas, mediante el uso del programa NVivo.

4. Ejemplo de aplicación de la rejilla en el aula de clase de matemáticas

Para la implementación de la rejilla en el conjunto de datos fue necesario establecer unos momentos metodológicos que permitieran avanzar en el análisis de los vectores de la ética comunitaria.

El primer momento está relacionado con la identificación de las acciones que se llevaron a cabo, así como los posicionamientos o las actitudes que tomaron los estudiantes y profesora, y cómo estos determinaron la presencia o no de los vectores, lo que quiere decir que estos se constituyen en una existencia viva en la actividad. El segundo momento tiene que ver con la manera en que cada vector hizo presencia; en otras palabras, se relaciona con el modo o los rasgos que aportaron los componentes de los vectores para el desarrollo de la actividad. El tercer momento se vincula con la relación que se dio entre la presencia de los componentes de los vectores y la ética comunitaria, la dialéctica entre los vectores y la presencia de la ética comunitaria.

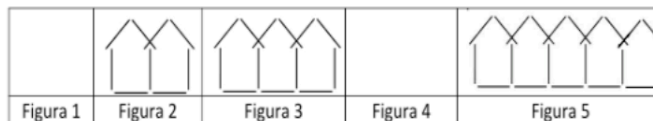
El ejemplo que se mostrará corresponde al análisis realizado a un segmento de la transcripción del desarrollo de la tarea número cinco aplicada al grupo de estudiantes, en específico el segmento V5.9. Dicha tarea se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Tarea 5

Parte 1 (40 min):

En clase se están construyendo figuras utilizando palillos. Observa la siguiente secuencia de figuras que construyó uno de los grupos de la clase:



1. Realiza el dibujo de las figura 1. ¿cuántos palillos utilizaron en las figura 1?
2. Realiza el dibujo de las figura 4. ¿cuántos palillos utilizaron en las figura 4?
3. Sin realizar el dibujo de la figura, digan ¿Cuántos palillos tiene la figura 20?
4. Escriban el procedimiento que siguieron para encontrar la cantidad de palillos de la figura 20.
5. ¿Existe alguna figura con 50 palillos? ¿por qué sí o por qué no?

Durante el segmento V5.9, las estudiantes se encuentran desorientadas para el desarrollo del punto cinco de la tarea, la profesora intenta darles ideas para que continúen con el desarrollo, pero aun así las estudiantes expresan abiertamente que no comprenden.

V5.9.

160 E1: existe alguna figura de cincuenta palillos ¿por qué sí? o ¿por qué no? (*se miran entre ellas (16:55)*) ¡no sé!

161 E15: existe alguna figura con cincuenta palillos (*las dos buscan con la mirada a la profesora en el salón*)

162 E1: profe, profe, nosotras ya estamos en el último, en este, pero es que no entendemos (*se tapa la boca con las manos (17:15)*)

163 profesora: ¿qué no entienden?

164 E15: ehh... el quinto

165 profesora: el quinto dice ¿existe alguna figura que tenga cincuenta palillos?, entonces mira (*les señala en la fotocopia las figuras y las niñas miran de manera atenta*) por ejemplo, esta, la figura uno, tiene cinco palillos; la figura cuatro, tú dices que tiene veinte; la figura tres, tú dices que tiene 97.

A partir del diálogo entre la profesora y las estudiantes E1 y E15 surge en ellas el interés por contarle a la profesora la forma en que procedieron para desarrollar los anteriores puntos de la tarea. Para E1 y E15 poder explicar a la profesora sus procedimientos las motiva a continuar desarrollando la tarea, además de que entre ellas se motivan, como sucedió en la línea 172.

166 E1: sabe, profe, ¿por qué nos dio 97, profe?

167 profesora: ¿por qué?

168 E1: porque aquí había 10 figuras, y como ahí dice que no la dibujemos, entonces nosotras la contamos de nuevo para que nos de eso y nos dio 97 (*E15 la interrumpe*)

169 E15: no profe, significa que hicimos 10 de estos (*señala la hoja donde escriben*) con diez de estos (*señala la fotocopia*)

170 E1: y nos dio eso

171 profesora: ¡ah!, ok

172 E1: ve que usted también explicó, así tiene que hacer

173 E15: escribimos ahora, quinto

174 E1: existe alguna figura con cincuenta palillos, sí, ¿sabe por qué? Porque esta tiene cinco, toca dibujarlo para saber

178 E1: no es eso, voy a escribir, sí, pero es que, es que no entiendo nada esto

179 E15: sí, porque, por ejemplo ...

182 E1: sí, porque si hacemos esas figuras nos dará ¿el número?

183 E15: porque si escribimos que no...

184 E1: sí E15

185 E15: ¿por qué?

186 E1: sí... porque si nosotras hacemos 50 casitas nos da el número

187 E15: sería un número mayor, muy mayor

188 E1: pero aquí nos dice ¿por qué? (*la interrumpe E15*)

189 E15: bueno, escribe ya, ya, ya. Bueno, ya terminamos, ya tenemos los tres todavía, yo creo que ya está listo E1 (*hace una pausa esperando que E1 escriba*),

tal vez el número que queramos

190 E1: pero para explicar hacemos 50 casitas y... (E15 la interrumpe)

191 E15: bueno, ¡haz las 50 casitas!

192 E1: ¿o no? Ya tengo una idea con esta que tenemos aquí, con esta, esta y esta tenemos 50 (E15 la interrumpe)

193 E15: pero es que nos da de nuevo cincue..., ¡ah!, no E1 (*sus gestos muestran preocupación (22:12)*) con este total de 10 nos da 50 ((22:14) *las niñas se miran y se sonríen mutuamente*) tenemos que hacer este total de casitas para que nos de 50

194 E1: ¡Ah, sí!, teníamos la respuesta de este punto, no importa cómo hagamos las casitas

195 E15: haz unas, E1 haz unas (*las dos niñas dibujan juntas en la hoja (22:40)*), para que terminemos







196 E1: ¡Sí podemos! (22.50) (*continúan juntas dibujando en la hoja*), ¿cuántas vas?

197 E15: son 10 casitas.

La pregunta de la tarea sobre la cual las estudiantes centran su discusión indaga por si existe o no alguna figura de cincuenta palillos. En el desarrollo del segmento V5.9 es evidente que las niñas no comprenden la pregunta y los ejemplos que les da la profesora no les ayudan a interpretar la pregunta. Por ello, las alumnas deciden dibujar 50 casitas. En la línea 191, E15 le sugiere a E1 hacerlo, pero no se encuentran seguras de que esta acción les permita responder la pregunta, por lo que en las siguientes líneas preguntan constantemente si lo que hacen es o no correcto. Lo sucedido durante el segmento V5.9 es el producto de las anteriores discusiones entre las niñas, y en el desarrollo de estas se pueden identificar marcas de los componentes de la ética. Seguidamente, en la Tabla 3 se relacionan las líneas de la transcripción de la marca del componente.

Tabla 3

Líneas e imágenes componentes de la ética en segmento V5.9

Componente	Línea V5.9	Imagen	Indicador
Excedencia	166-170		Muestra compromiso con el trabajo
Acogida	172		Valora los esfuerzos de los demás
Inmanencia	195		Considera al otro para lograr de mejor manera el trabajo conjunto
Encuentro-diálogo	190-194		Trata de entender una idea o una acción propuesta por alguien más.
Proximidad	196-197		En sus acciones, posicionamientos o actitudes muestra un interés por el compañero, en sus incomprensiones o dudas, atento (a) a prestar su ayuda
Exposición	178		Expresa abiertamente su comprensión o no de la tarea

A lo largo del segmento V5.9 es posible evidenciar varios tipos de interacción que tienen las estudiantes durante el desarrollo de la actividad; pero llama la atención que, en esta oportunidad, a pesar de que discuten y en ocasiones no logran estar de acuerdo, su interés y compromiso está en dar solución a la tarea de manera conjunta.

En el segmento V 5.9 emerge un tipo de relación particular, que consiste en que las niñas expresan abiertamente su poca comprensión, como también se motivan entre ellas; trabajan juntas por un interés común y se apoyan en la profesora cuando no se sienten seguras de lo que están haciendo.

Es necesario resaltar que en el segmento revisado es E1 quien lidera las acciones que permiten el trabajo conjunto; es ella quien anima, invitando a E15 a seguir trabajando juntas. E15 accede a los llamados de su compañera, si no fuera de esta forma, seguramente las niñas no hubiesen trabajado juntas.

En la Tabla 3 se muestran las marcas de cada uno de los componentes de los vectores del segmento V5.9, pero, como se evidencia, los componentes emergen en algunas líneas de la transcripción, como destellos, que permiten que la relación entre las estudiantes sea de manera armónica, y primordialmente afectan el desarrollo de la tarea de modo favorable, puesto que ellas se interesan por su desarrollo independiente de las dificultades o diferencias que tengan. Ese es uno de los aportes de la ética comunitaria en este segmento analizado, la forma en que se relacionan las estudiantes propicia que puedan discutir entre ellas y avanzar de manera conjunta en la solución de la tarea.

La profesora intervino cuando tenían dificultades, y aunque no fue suficiente su apoyo, ellas siguieron buscando y se continuaron mostrando interesadas por dar solución a las preguntas de la tarea de modo conjunto; para ambas era claro que diera la solución debía darse entre las dos.

5. Se concluye con unas reflexiones sobre ética y educación matemática

A partir del análisis de los vectores de la ética comunitaria en el conjunto de datos de la investigación doctoral, de la que se mostró un ejemplo en este escrito, se identificaron dos tipos de éticas: una ética abierta y una ética cerrada. La primera se refiere a formas de relación con el otro, que se consideran a partir de un principio de alteridad, donde el otro es un yo mismo y donde, a pesar de que es otro distinto al yo, su presencia le incumbe y transforma. Por lo anterior, la división del trabajo se hace con un interés de prestar ayuda al otro y acompañarlo. Mientras que la ética cerrada se define con base en la consideración de guardar la integridad de sus constituyentes, y se caracteriza porque su interés por el otro (su idea de alteridad) no se fundamenta en el sentido de una vida social.

En ambos tipos de éticas está la idea de alteridad presente, pero en cada una es percibida de forma diferente. En la ética abierta es una alteridad fundamentada en el principio de prelación al otro, según los planteamientos de Lévinas; y en la ética cerrada, la idea de alteridad se fundamenta en una relación al otro alienante. Una ética del utilitarismo/oportunismo, donde el otro es una posibilidad de beneficio propio (Lasprilla Herrera et al., 2021).

En el segmento V5.9 analizado, se evidencia un ejemplo de lo que se entiende por ética abierta; se identificaron rasgos de cada uno de los vectores de la ética comunitaria en la manera como se relacionaron las estudiantes E1 y E15. La posibilidad del diálogo, de valorar los esfuerzos del compañero y el tratar de entender al otro les permitió avanzar en la solución de las preguntas de la tarea. La armonía en la relación entre E1 y E15 permitió este tipo de relación de compañerismo y camaradería que, de no haber estado presente, hubiera dificultado que trabajaran juntas y pudieran avanzar en la solución de la tarea. En particular, las acciones y posicionamientos mostrados por E1 permitieron establecer marcas de los vectores de la ética comunitaria, que de igual forma propiciaron que E15 se motivara y, en ocasiones, también incentivara a su compañera.

La ética comunitaria se evidencia a partir de las marcas consideradas para cada uno de los vectores de la rejilla, pero es necesario decir que no es algo que se da de manera premeditada o planificada. Las interacciones y formas de relación al otro dependen de muchos factores, aspectos sociales, históricos y culturales. En el caso que se analizó en este escrito, la ética comunitaria emergió luego de un trabajo de aula desarrollado durante los años 2018 y 2019. Es necesario resaltar que durante las primeras tareas desarrolladas en el marco de la investigación doctoral de la que se tomaron los datos de este escrito, se evidenciaron formas de alteridad basadas en lo que se ha decidido llamar una ética cerrada (Radford & Lasprilla Herrera, 2020), pero en el avance de la implementación, en especial en la tarea cinco, que fue el segmento tomado para este escrito, emergieron formas diversas de relación al otro que permitieron evidenciar el trabajo conjunto de E1 y E15.

Es claro que aún quedan varios interrogantes sobre las características o detonantes de los vectores de la ética comunitaria, o la relación entre los indicadores propuestos y la labor conjunta. Son estos aspectos, entre muchos otros, los que dan la posibilidad de continuar estudiando e investigados la ética comunitaria (Lasprilla Herrera, León, & Radford, 2021). El interés de este análisis fue resaltar que la presencia de la ética comunitaria propicia un trabajo conjunto enriquecedor, tanto para las formas de relación de las estudiantes como para el conocimiento matemático en juego, en este caso los procesos de generalización de patrones.

Como establece Mèlich (2003), en la medida en que las personas son relacionales, tienen que afrontar, ineludiblemente, la cuestión ética. Aspecto que desde la educación toma mucha más fuerza e importancia, puesto que, como profesores de matemáticas, es necesario atender esta cuestión y propiciar reflexiones que posibiliten una mirada relevante e indispensable a los aspectos éticos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Reconocimientos

Agradecemos a la Secretaría de Educación de Bogotá, Colombia por el apoyo brindado en la formación, actualización e innovación en educación matemática en el programa del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Referencias bibliográficas

- Boylan, M. (2013). *Mathematics education and relational ethics: Dimensions and sources* [Paper presentation]. Third Mathematics Education and Contemporary Theory Conference, Manchester, United Kingdom.
- D'Ambrósio, U., & D'Ambrósio, B. S. (2006). Formação de professores de matemática: Professor-pesquisador. *Atos de Pesquisa em Educação-PPGE/ME FURB*, 1(1), 75–85.
- Daros, W. (2001). *La primacía de tu rostro inaprensible: La perspectiva ética de E. Lévinas*. Rosario: Universidad del Centro Educativo Latinoamericano.
- Domínguez, J. E. (2005). *El concepto de excedencia en las obras de Emmanuel Lévinas anteriores a Totalidad e Infinito 1934 a 1954* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma Metropolitana, México, DF.
<http://tesiuami.izt.uam.mx/uam/asp/asp/am/presentatesis.php?recno=12566&docs=UAMI12566.PDF>
- Ernest, P. (2019). The ethical obligations of the mathematics teacher. *Journal of Pedagogical Research*, 3(1), 80–91.
- Farías, M. E. (2015). *Una ética a gritos: La responsabilidad ética hacia el otro sufriente en Richard Rorty y Emmanuel Lévinas*. Santiago: Universidad Católica Cardenal Raúl Silva Henríquez.
- Freire, P. (1993). *Pedagogía de la esperanza: Un reencuentro con la pedagogía del oprimido*. Río de Janeiro: Siglo XXI.
- Freire, P. (2004). *Pedagogy of indignation*. Abingdon: Routledge.
- Innerarity, D. (2008). Un mundo sin alrededores. *Revista CIDOB d'Afers Internacionals*, 82–83, 51–55.
- Jaramillo, D., Jaramillo, L., & Murcia, N. (2018). Acogida y proximidad: Algunos aportes de Emmanuel Levinas a la Educación. *Actualidades Investigativas en Educación*, 18(1), 1–16.
- Lasprilla Herrera, A. (2021). *Constitución dialéctica de los procesos de objetivación y subjetivación con una ética comunitaria, en actividades desarrolladas al abordar tareas de generalización de patrones* (Tesis doctoral no publicada). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Lasprilla Herrera, A., & León, O. (2020). Elementos de un método para el estudio de aspectos éticos en la educación matemática escolar inicial. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 5(2), 129–139.
- Lasprilla Herrera, A., León, O., & Radford, L. (2021). Formas de interacción social y aspectos éticos en actividades matemáticas escolares. En L. Radford & M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía* (pp. 211–232). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Lévinas, E. (1991). *Ética e infinito*. Madrid: Visor.

- Lévinas, E. (2002). *Totalidad e infinito: Ensayo sobre la exterioridad*. Salamanca: Ediciones Sígueme.
- Lévinas, E. (2006). *De la existencia al existente*. Madrid: Arena Libros.
- Marx, K. (1988). *El capital*. Buenos Aires: Cartago Ediciones.
- Mèlich, J.-C. (2003). La sabiduría de lo incierto: Sobre ética y educación desde un punto de vista literario. *Educación*, 31, 33–45.
- Mèlich, J.-C., & Bárcena, F. (2000). *La educación como acontecimiento ético*. Buenos Aires: Editorial Paidós.
- Merino, J. M. (2004). *Los invisibles*. Madrid: Cátedra.
- Meza-Rueda, J.-L. (2012). Aprender el cuidado del otro: Una urgencia en la formación moral de un país en el cual nos estamos matando. *Actualidades pedagógicas*, 60, 215–235.
- Moratalla, A. D. (2014). Responsabilidad y diálogo en Lévinas: Claves para reconstruir una bioética del cuidado. En M. Busquets & P. Antón (Eds.), *Bioética y cuidados de enfermería* (pp. 123–136). Valencia: Consejo de Enfermería de la Comunidad Valenciana (CECOVA).
- Nodari, P. (2010). *Sobre ética: Aristóteles, Kant y Levinas*. Caxias do Sul: Educus.
- Quintero, W. (2014). Emmanuel Levinas: Una filosofía más allá del ser. *Cuadrantephi*, 26–27, 1–10.
- Radford, L. (2013). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: Hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. En Y. Morales & A. Ramírez (Eds.), *Memorias I CEMACYC* (pp. 1–16). Santo Domingo: CEMACYC.
- Radford, L. (2017). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L. (2018). Lenguaje, política y alteridad. En C. Noronha & T. Barbosa (Eds.), *Leituras e escritas: olhares plurais para múltiplas cenas educativas* (pp. 17–42). São Paulo: Editora Livraria da Física.
- Radford, L. (2021). La ética en la teoría de la objetivación. En L. Radford & M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía* (pp. 107–141). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Radford, L., & Lasprilla Herrera, A. (2020). De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *La matemática e la sua didáctica*, 28(1), 107–128.
- Radford, L., & Silva Acuña, M. (Eds.). (2021). *Ética: Entre educación y filosofía*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Romero, E., & Gutierrez, M. (2011). *La idea de responsabilidad en Lévinas: Implicaciones educativas*. XII Congreso Internacional de Teoría de la Educación (pp. 1–12). Universidad de Barcelona, Barcelona.
- Vila, E. (2004). Pedagogía de la ética: De la responsabilidad a la alteridad. *Athenea Digital: Revista de Pensamiento e Investigación Social*, 6, 47–55.
- Viveros, É., & Vergara, C. (2014). Aproximación a la noción de encuentro en Emmanuel Lévinas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 41, 61–69.
- Vygotsky, L. (1993). Pensamiento y lenguaje. En *Obras Escogidas* (Tomo 2, pp. 9–348). Madrid: Visor. (Trabajo original publicado en 1934).

Unas reflexiones básicas sobre el tema de las relaciones entre ética y didáctica de la matemática¹

Some basic reflections on the issue of the relationship between ethics and mathematics education

Riflessioni di base sul tema delle relazioni fra etica e didattica della matematica

Bruno D'Amore

*DIE (Doctorado Interinstitucional en Educación), Énfasis Matemática,
Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

NRD, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia

Resumen. *En este texto se examinan las relaciones básicas entre la ética y la educación matemática. También se discute la relación entre ética y moral.*

Palabras claves: ética, moral, teoría de la objetivación, labor, praxis.

Abstract. *In this text we examine the most basic relationship between ethics and mathematical education. The relation between ethics and morals is also discussed.*

Keywords: ethics, moral, theory of objectification, labour, praxis.

Sunto. *In questo testo si esaminano le relazioni basilari che sussistono fra etica e didattica della matematica. Si discute anche la relazione fra etica e morale.*

Parole chiave: etica, morale, teoria dell'oggettivazione, labor, prassi.

1. Ética

El término “ética” puede ser interpretado como el conjunto de normas y de valores sobre los cuales se fundamentan las reglas del comportamiento humano en la sociedad de la cual se es parte. Pero, puede también ser considerado como un criterio de juicio relativo a los comportamientos tanto propios como de los otros.

Dado que la descripción precedente está sujeta a interpretaciones

¹ Este texto es una ampliación de: D'Amore, B. (2021). Prologo. En L. Radford & M. S. Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía* (pp. IX-XVII). Bogotá: Universidad de los Andes - Centro de Ética Aplicada.

personales, son muchos quienes confunden la ética con la moral.

En mi opinión, sin embargo, la ética comprende una reflexión lógica y racional sobre los eventos sociales, que en la moral no se requieren. Si se razona así, se comienza a intuir el por qué tiene sentido hablar de ética en un tema como la didáctica.

2. Moral y ética

Ambas están relacionadas con el carácter de los hábitos de un grupo.

En varios contextos se utiliza el término ética para referirse a la filosofía moral, mientras que moral se refiere a los diferentes códigos de comportamiento concretos.

Algunos autores conciben la ética como el conjunto de normas sugeridas por ideas o creencias, la moral como el conjunto de las normas imperantes en un determinado grupo social. No todos están de acuerdo con dicha distinción, y es por esto que en ocasiones no se hace distinción entre los dos conceptos, considerándolos equivalentes.

El matiz que los delimita está en la observancia o aplicación práctica de la norma que entraña el mandato ético. Por ello, la norma ética siempre es teórica, en tanto que la moral sería su aplicación práctica.

Según este punto de vista, la moral se basa en los valores que dicta la conciencia; valores que, a su vez, están basados en costumbres compartidas en una comunidad. Dicho punto de vista dice que la moral no es absoluta ni universal, ya que su vigencia depende de los hábitos de una región o de una comunidad: se habla por lo tanto de una forma de *relativismo cultural*.

El núcleo de la moral se establece alguna vez con el concepto de “valor”. Cada persona tiene unos valores determinados, igualmente como los tiene la cultura que identifican estos valores.

Por otra parte, la universalidad de algún sistema moral es uno de los objetivos de la ética, un objetivo cuyo contenido o efecto no se considera relativo ni subjetivo, sino efectivo y aplicable para todo hombre racional bajo un contexto determinado. Para afirmar esto, hay que suponer que este hombre pueda actuar de manera racional y según un comportamiento moral específico compartido, comportamiento que la sociedad juzga “correcto”.

Immanuel Kant (1724-1804), con su *imperativo categórico*, intentó dar las bases a una moral objetiva nacida de la razón y no de una religión, como era la creencia típica de la época: “Obra de tal modo que trates a la humanidad, tanto en tu persona como en la persona de cualquier otro, siempre al mismo tiempo como fin y nunca simplemente como medio” (Kant, 1797, A IV: 421). Una de las principales objeciones que se oponen a sus razonamientos, es el uso obligatorio de la *verdad* y del *deber* con exclusión del *sentir*.

La crítica que hace Friedrich Nietzsche (1844 – 1900) a la moral y la ética subraya que los códigos morales y las éticas que estudian o fundamentan estos

códigos morales se presentan como reveladoras o, a veces, por el contrario, encubridoras de profundas verdades sobre el ser humano. Me estoy refiriendo a la célebre *genealogía de la moral* (Nietzsche, 1887).

Es famoso su análisis de la moral cristiana en el cual manifiesta cómo los valores cristianos (por ejemplo: humildad y compasión) se basan realmente (según su análisis) en la hipocresía y en el resentimiento. Los valores morales son en realidad estratagemas de dominio de unos hombres sobre otros. Pero ninguna moral ni ninguna ética reconocen esto, pues es esencial para estas ocultarlo. Para descubrir estas “ocultaciones”, Nietzsche propone un método que él llama “genealógico”; es decir, emprende algo que se puede llamar como una “genealogía de la moral”. Se trata de hacer análisis psicológicos y de uso del lenguaje a partir de textos éticos y morales y de observaciones de conductas morales. En su obra del 1887 citada, *La genealogía de la moral*, Nietzsche dice que: las morales y las éticas que hacen pasar por “verdaderos” y “universales” unos valores que son “morales de esclavos”. Su propuesta entraña la total libertad creativa de cada hombre en el más estricto sentido, en un sentido parecido al que se aplica cuando se habla en el arte contemporáneo de la “libertad de un artista”. Cada hombre ha de realizar sus deseos y dejar que también se expresen los deseos de los demás, sin códigos verdaderos previos.

Muchos autores proponen que la moral es un producto de la selección natural, en cuanto esta conserva comportamientos sociales favorables al éxito evolutivo de los grupos.

Las sociedades animales muestran muchos ejemplos de cohesión basada en la sumisión instintiva a las que parecen ser leyes no escritas. Los grupos primitivos antepasados de la especie humana tenían sin duda una organización de este tipo que, con el desarrollo de las facultades cerebrales, se transformó progresivamente en la institución de legislaciones explícitas, y en el consecuente respeto de ellas.

Las sociedades que se otorgaron leyes y las aplicaron resultaron ser más capaces de sobrevivir y proliferar que las sociedades libradas a la anarquía y a la competencia salvaje entre sus miembros.

El biólogo Edward Osborn Wilson propuso esta idea bajo el nombre de *sociobiología* en una importante obra, *Consilience*. Según estas ideas, todo nuestro sistema de valores, incluyendo las creencias, virtudes y normas relacionadas con ellas, es el resultado de la oportunidad evolutiva. El sistema existe simplemente porque resultó ser útil para el éxito evolutivo de los grupos que lo practicaron (Wilson, 1998).

Otros filósofos y científicos sociales se han opuesto vigorosamente a la sociobiología por diversas razones. Algunos ven en ella vestigios del darwinismo social, una posición empírico-lógica que defendió especialmente el filósofo inglés Herbert Spencer (1820 – 1903). En opinión de otros, la sociobiología exagera el papel del determinismo genético, en detrimento de las

influencias ambientales, y promueve así discriminaciones sociales.

Una acertada crítica a la idea de Wilson fue realizada por Clinton R. Dawkins (1941) que estudia el singular comportamiento ético del ser humano en comparación con los animales (Dawkins, 2004).

¿Cuál es entonces el origen de nuestro comportamiento ético? Existen buenas razones para creer que, por evolución biológica y por desarrollo cultural, la ética ha evolucionado de forma progresiva, desde una forma puramente pragmática y utilitaria, hasta una concepción más abstracta del bien y del mal. La mayoría de las civilizaciones distinguen entre las legislaciones, dictadas por consideraciones de convivencia, y las normas éticas, basadas en valores absolutos.

También son obvios los aspectos institucionales, normativos y sociales: el ser humano es parte de la institución (por ejemplo: la clase, la escuela) y la ética no tiene que ver con un determinado individuo en sí, sino que tiene que ver con la *relación* de éste con los otros individuos *dentro de la institución misma*.

Se trata entonces de un tema relacional y social.

Al interno de la institución, la ética guía la acción del individuo en relación con los demás y condiciona los sentimientos; y tiene profundos aspectos sociales porque lleva a evitar el deseo de satisfacer sólo los intereses personales en favor de objetivos más amplios, los objetivos sociales, precisamente.

Hasta hacer del *ser individual* un *individuo social*: un juego de palabras iluminante.

El filósofo británico George Edward Moore (1873 – 1958), uno de los fundadores de la filosofía analítica, y por esto, muy cercano a la posición logicista de Bertrand Russell (1872 – 1970) y cercano a la matemática, nos ha explicado que en ética se deben evitar definiciones, sólo se debe recurrir a nominalizaciones y a descripciones. Por ejemplo, no se debe intentar dar una/la definición de “mal”, sino dar ejemplos y descripciones de hechos y eventos; es decir situaciones en las cuales tenga sentido usar dicho sustantivo abstracto, *ética*.

En su trabajo principal, *Principia Ethica* (Moore, 1903), Moore sugiere que la conducta individual debe basarse, precisamente en los principios éticos, en el seguimiento y en la búsqueda del bien.

Moore basa su propio análisis en la distinción entre moral y conocimiento, dos polos de atracción muy diferentes del ser humano: la ética no es un aspecto del conocimiento ya que está en relación con emociones y sentimientos.

¡Pero nada nos impide pensar y constatar que el conocimiento crea emociones y sentimientos!

En el ámbito de la filosofía de la ciencia, una noción de ética aplicada surge a inicios de la década de los '70 con la intención de promover una

reflexión ética, precisamente, no de tipo general ni fundamental, sino estrictamente relacionada con problemáticas particulares, para así poder afrontar el desarrollo tecnológico y científico, esforzándose en integrar la propia competencia con la adquisición de nociones y de datos que provienen de las ciencias naturales, biológicas, sociales etc.

Era evidente, desde el inicio, que dicha Ética era examinada sobre la base de valores y de principios morales y sociales, por tanto, aún con alguna confusión.

En tiempos recientes se afianzó la idea de una “ética de la ciencia pura” que tiene como objetivo la codificación de los presupuestos éticos de la investigación científica. Aquí se puede introducir la que más nos interesa, la investigación no sólo en matemática, sino también en didáctica de la matemática.

Sabemos bien que, en tiempo remoto, la investigación desinteresada de la verdad era considerada en sí misma un valor ético, en particular en las ciencias matemáticas (y en la filosofía). Tomamos un ejemplo clásico:

Sócrates: *La sabiduría es un bien, la ignorancia es un mal.*

En tiempos modernos, estoy haciendo referencia, por ejemplo, a los estudios iniciados por el sociólogo Robert Merton (1910 – 2003) (Merton, 1973). Para él, el *ethos* que regula el comportamiento de los científicos se compone de cuatro normas fundamentales:

- el desinterés, es decir, el imperativo de buscar la verdad más allá de los beneficios materiales y personales que se podrían obtener;
- el comunismo epistémico, es decir, el imperativo de poner en común sus propios conocimientos sin pedir nada a cambio;
- el escepticismo organizado, es decir, el imperativo de dudar de cada afirmación no sustentada por pruebas empíricas o racionales;
- el universalismo, es decir, el imperativo de no discriminar los productores de una idea científica sobre la base de sus características personales (edad, sexo, grupo étnico, nacionalidad etc.).

3. Regresamos a nuestro tema fundamental: la didáctica de la matemática

Ahora bien, pensemos en todos los factores emocionales, sociales, interpersonales que encontramos en el trabajo didáctico.

Los conceptos de labor conjunta, de subjetivación, de objetivación, inducen a pensar que, más allá de lo que emerge en la labor común en aula entre docente y alumno, entre alumno y compañeros, en la sociedad concreta y no sólo en la sociedad ideal “clase”, los principios éticos, relacionados con los sentimientos personales implicados en los procesos de objetivación son relevantes, complejos y, al mismo tiempo, espontáneos, y forman parte de

aquello que a veces, ingenuamente, se llama *aprendizaje*.

Es así como adquiere sentido completo la idea que algunos estudiosos de didáctica de la matemática centren sus análisis en el tema de la ética, en particular para quienes se inspiran en aquellas teorías de la didáctica de la matemática que se aglutinan bajo el nombre de *teoría de la objetivación*, en la cual se promulgan ideas que no encuentran espacio en teorías precedentes relacionadas con las interacciones sociales que se desarrollan en aula y a la idea que aprender (la matemática) significa formar parte de una sociedad, desarrollar un conocimiento y una consciencia histórica de pertenencia.

Quiero aquí recordar que la teoría de la objetivación está ubicada entre las teorías llamadas *socioculturales*.

En dichas teorías se supone que el saber es generado por los individuos en el curso de prácticas sociales construidas histórica y culturalmente.

La producción del saber no depende por tanto de exigencias de adaptación, sino que está incorporada en formas culturales de pensamiento, relacionadas con una realidad simbólica, política, económica y material que ofrece las bases para interpretar, comprender y transformar el mundo de los individuos, los conceptos y las ideas que ellos se forman a propósito de dicha realidad.

El aprendizaje es la realización de un saber culturalmente objetivo que los estudiantes obtienen a través de un proceso social de objetivación mediado por signos, lenguajes, artefactos e interacciones sociales, cuando los estudiantes se empeñan en formas culturales de reflexiones y de acción (D'Amore, 2015, 2018).

Respecto a los paradigmas precedentes, las bases de las teorías sociales culturales se presentan como una ruptura en el verdadero sentido del significado; se trata, de hecho, de interpretar en forma decididamente nueva las ideas de conocimiento y saber.

Según las teorías socioculturales, el concepto de adaptación como forma de aprendizaje no es suficiente para entender en toda su profundidad la idea de producción de saberes, de su manifestación concreta en las prácticas sociales o de su apropiación como conocimiento (el aprendizaje).

Según estas teorías el saber y el conocimiento no son el resultado de estructuras de carácter epistémico que trascienden la cultura, sino que esas mismas estructuras son los resultados de una forma cultural, constituida de reflexiones y de acciones incorporadas en las mismas prácticas sociales, con la mediación del lenguaje, debidas a la interacción social, gracias al uso de signos y a la creación de artefactos oportunos (Radford, 2006, 2011; D'Amore & Radford, 2017).

La teoría de la objetivación, en particular, se basa en la idea considerada fundamental que *el aprendizaje es, al mismo tiempo, conocer y devenir*, es decir, no puede ser circunscrito únicamente al ámbito del conocimiento, sino que debe afrontar el ámbito del ser y aquello específico de los sujetos.

El objetivo de la educación matemática es un esfuerzo dinámico, político,

social, histórico que lleva a sujetos reflexivos y éticos, hacia la creación dialéctica relativa a discursos temáticos y hacia prácticas de carácter matemático que se constituyen histórica y culturalmente, discursos y prácticas que están en evolución continua.

A fortalecer estas reflexiones me ha llevado la lectura atenta y crítica de un libro reciente: *Ética: Entre Educación y Filosofía* (Radford & Acuña, 2021). Este libro es el resultado de un diálogo entre educadores de la matemática y filósofos; trata del problema de la ética, considerándola como disciplina que se investiga a la luz de dos direcciones de interés general: la educación y la filosofía. Aunque la ética sigue relativamente eludiendo la atención de la investigación en la educación matemática, un examen de la literatura permite descubrir una serie de estudios, que incluyen trabajos de Paul Ernest y Luis Radford. Entre aquellos que más me han impresionado cabe mencionar algunos de Ernest (1988, 1991, 1994, 1998, 2011, 2018, 2019) y otros de Radford (2011, 2012, 2014, 2016a, 2016b, 2016c, 2016d, 2017a, 2017b).

Este libro adquiere así un interés especial, iniciando con el título, ya insinuado en mis notas precedentes: propone una ética vista como punto de pasaje entre educación y filosofía.

Cada una de las tres partes de las cuales se compone el libro plantea una problemática específica y no sólo culturalmente atractiva.

En la Parte 1, la ética se presenta como puente de conjunción y de debate entre la filosofía y la educación, con análisis muy precisos y significativos, incluso concretos, acerca del papel del docente, incluyendo discusiones sobre la sensibilidad, el espacio ético del cuerpo y las funciones estéticas interpretadas como elementos descriptivos de una ética pedagógica.

En la Parte 2, la relación se invierte, y el debate se sitúa entre educación y filosofía. No son situaciones idénticas, sino simétricas; algunas incluso pueden ser concretas, como la presencia de la problemática de la ética en la matemática y en su enseñanza.

Como afirmaba líneas arriba, el encuentro con el otro determina la dimensión ética pero siempre de forma específica y significativa en la educación matemática. Es esta especificidad, esta forma de ver e interpretar, esta forma de situarse lo que define y describe la relación específica de esta segunda parte del libro.

Desde este ángulo teórico, tan específico y significativo, como esperábamos y como lo anuncié en el caso específico de la teoría de la objetivación, se determina con precisión aquello que se entiende en esta teoría como ética.

Un ejemplo significativo y específico se tiene en la teoría de la objetivación en la cual la educación matemática, como mencioné anteriormente, es vista como esfuerzo social volcado a la creación de sujetos que vienen a idear, imaginar y compartir formas de vida colectiva, como resultado del impulso que han recibido hacia formas potenciales de acción y

de pensamiento.

Es evidente como el contenido matemático de las acciones que se cumplen en didáctica de la matemática no es nada más que *una* componente, no estamos hablando de *la* componente.

Acción no sólo sobre el *saber*, sino sobre el *ser*, tanto de llegar a concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje como una dimensión que involucra estos dos aspectos fundamentales del individuo: saber y ser.

Dado que aquel sobre el cual este proceso de aprendizaje está construido/hipotetizado/realizado es un ser humano, los aspectos culturales deben formar parte de este proceso; pero también deben serlo los aspectos relacionales, colectivos y sociales, éticos precisamente; y siendo este fenómeno tan absorbente en el plano humano, ninguno de los aspectos emocionales puede ser minimizado: aprendiendo, el individuo se transforma porque entra en contacto con hechos históricos culturales e históricamente situados en la sociedad.

Es por esto que se habla siempre, a este propósito, de “encuentro”, dado que se ponen en contacto sistemas de pensamiento, de evoluciones vitales, de acciones que determinan la sociedad con la cual el estudiante se relaciona. Este encuentro no es sólo heterólogo, sino que también es personal. Gracias a este proceso, quien aprende entra en contacto con sí mismo, en su singularidad y en su pertenencia a una sociedad que está, ética e históricamente, descubriendo y al mismo tiempo construyendo.

En otras ocasiones he analizado en profundidad estos aspectos, por ejemplo, estudiando el concepto de *labor* y el de relaciones entre la subjetivación y la objetivación; por tanto, no voy a profundizar y me limito a un par de citas de textos en español (D’Amore, 2015, 2018).

Es decisivo entender cómo individuo y cultura son entidades no sólo puestas en mutua relación sino coexistentes, nunca inmóviles; son entidades sometidas a cambios continuos, con influencias que determinan sus relaciones y que conllevan continuos cambios.

Alumnos y docentes están, por tanto, también ellos en continuo cambio relativo, activos en la transformación de sí mismos y relaciones recíprocas, representando proyectos de vida nunca firmemente determinados sino en continua evolución, con cambios de sensaciones y de experiencias recíprocas; por lo tanto, en otras palabras, sujetos éticos con influencias recíprocas.

En la Parte 3 se abre un esperado camino significativo, en un cierto sentido determinante: se aborda la cuestión de cómo la ética se revela y se especifica en la educación. Se llega a argüir que la acción del docente de matemática se sitúa entre ética y estética. Se propone que la inclusión, en las clases de matemática, debe ser considerada un imperativo ético.

Este tema ha sido debatido en todo el mundo desde hace años sin llegar a ser resuelto; en ocasiones es interpretado de manera opuesta de lo que la ética sugiere, es más, de lo que la ética impone.

Así como la reflexión y la postura ética forman parte esencial de la formación docente, tal y como se ve en los profesionales de la salud, de los periodistas o de quienes crean fuentes o canales de información, resulta igualmente de gran importancia la reflexión específica de los aspectos éticos presentes en la actividad matemática.

Este libro regala al lector, al docente de matemática, al investigador en didáctica de la matemática reflexiones e indicaciones muchas veces omitidas, olvidadas o dadas por descontadas; estas reflexiones no son secundarias a aquellas que ocupan un mayor debate en el campo de análisis de investigación, sino que, por el contrario, de alguna manera los determinan.

Es por esto que saludo con entusiasmo y con favor este libro, texto que presenta ámbitos de estudio muchas veces marginalizados, presentándolos con un gran número de detalles, incluso concretos, con reflexiones profundas, densas y significativas que sorprenderán, lo sé, lo imagino, a los lectores.

4. Acción, labor, praxis: elementos de base para un estudio de la ética

Los significados de estos términos giran alrededor de la evidencia del hecho de que, en situación de enseñanza y de aprendizaje, los dos polos de la acción, digamos docente y alumno, comparten una práctica que los vincula, que los modifica, con papeles y actividades no siempre distinguibles, práctica que se basa en la idea de *labor* entendida en el sentido marxista del término.

En su “conferencia de Barranquilla”, Radford nos da las líneas guía de esta interpretación (Radford, 2013). Cita justamente la *Introducción a la crítica de la economía política* de Karl Marx (1818 – 1883) (Marx, 1857/1970) y las dos grandes categorías con las cuales se puede definir el trabajo:

- 1) las *relaciones de producción*, es decir las formas históricas y culturales de interacción humana;
- 2) los *modos de producción*, es decir la manera de producir de los individuos.

No vale la pena agregar algo más, reenviando necesariamente al mismo texto de Radford [perfecta la citación de Dupré que hago mía: “Ni la materia bruta ni los instrumentos constituyen la fuerza económica hasta que son integrados dentro de un sistema social” (Dupré, 1983, p. 86)].

Desde esta perspectiva histórico-social hay que notar la precisa y profunda crítica que hace Radford a la interpretación de la función del alumno, como *propietario privado* que debe *construir* su propio saber *negociando* sus significados, y del maestro que guía la construcción del alumno (Radford, 2013). Comenta Radford (2013): “No hay teoría en la educación matemática que se haya apegado con más fuerza y haya promovido con tanta energía esos conceptos como el constructivismo norteamericano”.

Yo quiero ir más allá, pero en la misma dirección.

Dado que de trabajo se trata, hay que definir un valor, recordando teorías económicas clásicas: el valor de cada cosa depende de la cantidad de trabajo necesario para producirla [Adam Smith (1723 – 1790), David Ricardo (1772 – 1823), Karl Marx, sólo para citar algunos pensadores]. Y, para mí, este valor se basa en la eterna dialéctica entre “hombre histórico” y “hombre social”.

Para buscar una contribución a esta pista de análisis, me sirvo del famoso libro *Dialectica de la Naturaleza* de Friedrich Engels (1820 – 1895) (Engels, 1883/1956).

1956 es el año de una edición italiana del libro ¿Por qué citar precisamente la edición italiana? Porque la tercera edición italiana de este extraordinario texto de epistemología de la ciencia (marcadamente dialéctica) fue editada por un personaje de excepción, Lucio Lombardo Radice (1916 – 1982), matemático muy bien conocido en el ambiente italiano, político activo en el partido comunista, con gran interés por los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y por la divulgación de la misma.

En la introducción de Lombardo Radice se lee: “El interés de Marx estaba netamente polarizado hacia el *hombre histórico*, el hombre de la labor y de la producción social, hacia la dialéctica de la praxis humana social” (Engels, 1883/1956, p. 16).²

Cómo ya hemos dicho, se trata de la célebre obra *Dialéctica de la Naturaleza* que Friedrich Engels proyectó como idea para la redacción de parte de un volumen que no alcanzó a concluir, cuyo índice parece fue elaborado en 1878 una primera vez y después en 1883. En la página 17:

Marx veía en el trabajo y en la producción social un elemento del todo nuevo y original, respecto a los procesos naturales, que implica otra dialéctica. (...) El hecho es que el elemento primero, el constituyente elemental de tal dialéctica es la praxis, la actividad humana del trabajo. “El defecto principal de cada materialismo hasta hoy, (...) es que el objeto, lo real, lo sensible es concebido sólo bajo forma de objeto o de *intuición*; pero no como actividad humana sensible, como actividad práctica, no subjetivamente”. (Engels, 1883/1956, p. 17)

(La frase entre comillas altas es tomada de Lombardo Radice del apartado de F. Engels al interior del libro, en el capítulo: “Primera Tesis Sobre Feuerbach”). En la página 18:

Sobre la “parte obtenida de la labor en el proceso de humanización del simio” el lector encuentra, en esta *Dialéctica de la naturaleza* de Engels, un ensayo que desarrolla brillantemente y con detalle la idea de Marx, que el hombre es el resultado de su propio trabajo. (Engels, 1883/1956, p. 18)

Sobre este punto se cita un artículo de otro intelectual y político italiano, Palmiro Togliatti (1893 – 1964) (Togliatti, 1954). Togliatti afirmaba: “Un verdadero naturalismo y un auténtico humanismo no pueden surgir sino a condición de que la realización de la naturaleza humana sea entendida como el

²De aquí en adelante, todas las traducciones son nuestras.

resultado de un proceso” (las palabras son de Lombardo Radice, página 18, nota 2). Lo mismo en la página 21:

La acción recíproca excluye todo primario absoluto y todo secundario absoluto; pero es igualmente un proceso de dos caras que, por su naturaleza, puede ser considerado desde dos puntos de vista diferentes; para poder ser comprendido en su conjunto debe precisamente ser estudiado sucesivamente desde dos puntos de vista opuestos, antes que pueda ser comprendido el resultado plenamente. (Engels, 1883/1956, p. 21)

Las componentes éticas son presentes con una fuerza terrible.

Cuando decimos que la acción del docente y del alumno no son “dos acciones” sino que es “la misma acción”, encontramos precisamente este punto de vista; la labor, lo que se produce, la persona que lo produce, los varios agentes, ... son todos componentes al unísono de una única actividad que, con una sola palabra, podemos llamar la *labor*. Veamos que dice el mismo Engels (1883/1956) en la página 190:

Frente a todas estas creaciones, que se presentaban como productos directos de la mente y que parecían dominar las sociedades humanas, los más modestos productos de la labor manual fueron relegados en un segundo plano; (...). Todo el mérito de los rápidos progresos de la civilización fue atribuido a la mente, al desarrollo y a la actividad del cerebro; (...) incluso los científicos materialistas de la escuela darwiniana no logran aún hacerse una idea del origen del hombre porque, estando aún bajo la influencia ideológica del idealismo, no reconocen la función que ha tenido el trabajo en aquel proceso.

Según mi opinión, estamos frente a una notable identificación que ayuda a entender posiciones diversas, de hecho, antitéticas, en el proceso de la labor en aula, pero también en su interpretación, aquel “valor” sobre el cual he puesto el acento inicial.

Insisto: enseñar y aprender son indistinguibles. El docente se transforma a sí mismo en la práctica de enseñar, así como el alumno se transforma al aprender. Estas transformaciones se deben a la labor puesta en práctica por los dos de forma personal, pero en el contexto social de pertenencia, el contexto escuela, en la evolución de la práctica de aula, que es una acción social (no individual) puesta en acto por todos aquellos que participan en ella.

El “objeto” construido en este trabajo está previamente delimitado, así como lo es en el trabajo en general; no se trata de replicar un modelo o construir uno de nuevo, sino de acercar el resultado de la acción a lo esperado, que se puede llamar “institucional” (D'Amore & Godino, 2006, 2007).

No es necesario que el objeto matemático en construcción preexista de cualquier forma metafísica, identificable con el objeto de conocimiento en juego; es suficiente que este sea parte de la transposición didáctica de un objeto institucional transposición puesta en obra por el docente (D'Amore, 2001).

Las consecuencias éticas de estas interpretaciones son de una fuerza totalmente novedosa que, en mi personal opinión, solo la teoría de la objetivación puede explicar y tomar en seria consideración teórica.

Referencias bibliográficas

- D'Amore B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, 15(1), 4–30.
- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino “Carlo Bo”*. http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509
- D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA*, 12(2), 97–127.
- D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico e ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(1), 9–38.
- D'Amore, B., & Godino, D. J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 10(2), 191–218.
- D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Dawkins, C. R. (2004). *The ancestor's tale: A pilgrimage to the dawn of evolution*. London: Weidenfeld and Nicolson.
- Dupré, L. (1983). *Marx's social critique of culture*. New Haven: Yale University Press.
- Engels, F. (1956). *Dialectica della natura*. Roma: Editori Riuniti. (Trabajo original publicado en 1883).
- Ernest, P. (1988) The attitudes and practices of student teachers of primary school mathematics. In A. Borbas (Ed.), *Proceedings of 12th International Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 1, pp. 288–295). Veszprem: OOK.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Routledge.
- Ernest, P. (Ed.). (1994). *Mathematics education and philosophy: An international perspective*. Washington, DC: Falmer.
- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.
- Ernest, P. (2011). *Mathematics and special educational needs: Theories of mathematical ability and effective types of intervention with low and high attainers in mathematics*. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing.
- Ernest, P. (Ed.). (2018). *The philosophy of mathematics education today*. Cham: Springer International Publishing.

- Ernest, P. (2019). The ethical obligations of the mathematics teacher. *Journal of Pedagogical Research*, 3(1), 80–91.
- Jonas, H. (1978). *On faith, reason and responsibility: Six essays*. San Francisco: Harper and Row.
- Kant, I. (1797). *Die Metaphysiker Sitten*. Erstdruck: Königsberg.
- Marx K. (1970). *Introducción general a la crítica de la economía política*. México, DF: Ediciones Pasado y Presente. (Trabajo original publicado en 1857).
- Merton, R. K. (1973). *The sociology of science: Theoretical and empirical investigation*. Chicago: University of Chicago Press.
- Moore, G. E. (1903). *Principia ethica*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Nietzsche, F. (1887). *Zur Genealogie der Moral. Eine Streitschrift*. Leipzig: Naumann.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 9(1), 103–129. <http://luisradford.ca/publications/#2006>
- Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez, & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent: intervenció, innovació, investigació* (pp. 33–49). Girona: Documenta Universitaria.
- Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1–2), 101–118.
- Radford, L. (2013). *De la teoría de la objetivación*. Conferencia inaugural del XIV Congreso Colombiano de Matemática Educativa, Barranquilla, Colombia, 9–11 octubre 2013.
- Radford, L. (2014). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 1–20). Vancouver: PME.
- Radford, L. (2016a). The ethic of semiosis and the classroom constitution of mathematical subjects. *13th International Congress on Mathematical Education. Topic Study Group 54: Semiotics in Mathematics Education*. Hamburg, 24–31 July 2016. Hamburg, Germany: ICME. http://www.luisradford.ca/pub/Radford-ICME-13-PAPER-short%20version_v5.pdf
- Radford, L. (2016b). The epistemic, the cognitive, the human: A commentary on the mathematical working space approach. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 925–933.
- Radford, L. (2016c). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258–266.
- Radford, L. (2016d). The theory of objectification and its place among sociocultural research in mathematics education. *International Journal for Research in Mathematics Education*, 6, 187–206.
- Radford, L. (2017a). La consapevolezza dell'importanza del contesto sociale, culturale e politico del pensiero, dell'insegnamento e dell'apprendimento: alcuni elementi del mio percorso. *La matematica e la sua didattica*, 25(1), 65–74.
- Radford, L. (2017b). Ser, subjetividad y alienación. En D'Amore, B., & Radford, L. (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos*,

- epistemológicos y prácticos* (pp. 137–166). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L., & Acuña, M. S. (Eds.). (2021). *Ética: Entre educación y filosofía*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Togliatti, P. (1954). Da Hegel al marxismo. *Rinascita*, 11, 254–256, 336–339, 387–393.
- Wilson, E. O. (1998). *Consilience: The unity of knowledge*. New York, NY: Knopf.

Hibridación de teorías en el sistema teórico del enfoque ontosemiótico

Hybridisation of theories in the onto-semiotic theoretical system

Ibridazione di teorie nel sistema teorico dell'approccio ontosemiotico¹

Juan D. Godino

Universidad de Granada, Granada, España

Resumen. *La complejidad de los problemas que plantea la investigación en didáctica de la matemática, situada en el cruce de diversas disciplinas académicas, explica la variedad de teorías que se usan para abordarlos y, por tanto, la necesidad de clarificar, comparar y articular dichas teorías. En este trabajo explico el origen del enfoque ontosemiótico (EOS) como una propuesta de elaboración de un sistema teórico modular e inclusivo para la didáctica de la matemática, con el objetivo de construir un sistema de herramientas necesarias y suficientes para abordar, no solo el problema educativo-instruccional propio de la didáctica, sino también los problemas epistemológicos, ontológicos y psicológicos implicados. En una primera etapa se introdujo la noción de significado pragmático y configuración ontosemiótica mediante las cuales, sobre bases antropológicas y semióticas, se articulan las nociones de conocimiento y saber usados en la didáctica francesa. Tras una breve descripción de las herramientas del EOS, se incluye también una síntesis de diversos trabajos en los cuales se aborda la articulación de dichas herramientas con otros marcos teóricos, indicando la complejidad del problema de hibridación de teorías y la amplitud de las cuestiones pendientes.*

Palabras claves: educación matemática, marcos teóricos, enfoque ontosemiótico, articulación de teorías.

Abstract. *The complexity of the problems posed by research in didactics of mathematics, located at the crossroads of various academic disciplines, explains the variety of theories used to address them and, therefore, the need to clarify, compare and articulate these theories. In this paper, I explain the origin of the onto-semiotic approach (OSA) as a proposal for the elaboration of a modular and inclusive theoretical system for the didactics of mathematics, with the aim of building a system of necessary and sufficient tools to address not only the educational-instructional problem of didactics, but also the epistemological, ontological and psychological*

¹ Artículo invitado/Invited article/Articolo invitato.

problems involved. In a first stage, the notion of pragmatic meaning and onto-semiotic configuration was introduced, by means of which, the notions of knowledge and savoir in the French didactics are articulated using anthropological and semiotic bases. After a brief description of the OSA tools, a synthesis of various publications is also included, in which the articulation of these tools with other theoretical frameworks is addressed, indicating the complexity of the problem of hybridisation of theories and the extent of the outstanding questions.

Keywords: mathematics education, theoretical frameworks, onto-semiotic approach, articulation of theories.

Sunto. *La complessità dei problemi posti dalla ricerca in didattica matematica, situata al crocevia di varie discipline accademiche, spiega la varietà delle teorie utilizzate per affrontarle e, quindi, la necessità di chiarire, confrontare e articolare tali teorie. In questo lavoro spiego l'origine dell'approccio ontosemiotico (AOS) come proposta per l'elaborazione di un sistema teorico modulare e inclusivo per la didattica della matematica, con l'obiettivo di costruire un sistema di strumenti necessari e sufficienti per affrontare, non solo il problema educativo-didattico specifico della didattica, ma anche i problemi epistemologici, ontologici e psicologici coinvolti. In una prima fase è stata introdotta la nozione di significato pragmatico e di configurazione ontosemiotica attraverso la quale, su basi antropologiche e semiotiche, si articolano le nozioni di conoscenza e sapere utilizzate nella didattica francese. Dopo una breve descrizione degli strumenti dell'AOS, si include anche una sintesi di diversi lavori nei quali viene affrontata l'articolazione di questi strumenti con altri quadri teorici, indicando la complessità del problema dell'ibridazione fra teorie e l'ampiezza delle questioni che restano in sospeso.*

Parole chiave: didattica della matematica, quadri teorici, approccio ontosemiotico, articolazione di teorie.

1. Introducción

La articulación de marcos teóricos (*networking theories*) está recibiendo una atención particular por diversos autores (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello 2008; Radford 2008a), quienes consideran que la coexistencia de diversas teorías para explicar los fenómenos de una disciplina como la didáctica de la matemática puede ser, hasta cierto punto, inevitable y enriquecedora, pero al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como un campo científico. Prediger et al. (2008) describen diferentes estrategias y métodos para articular teorías, que van desde ignorarse entre sí, a la unificación global. Desafortunadamente, esas estrategias de integración y síntesis de teorías no se están aplicando a nivel internacional, como se puede ver en el resultado final de uno de los esfuerzos más destacados en esa dirección, como es el libro “*Networking of theories as a research practice in mathematics education*” (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014). Como resalta Ruthven en dicho libro, a pesar de las limitaciones que

revela la confrontación de las cinco teorías estudiadas, al entrar en competición cada una de ellas se esfuerza por defender su propia identidad.

Personalmente considero que el progreso en cualquier disciplina, y en particular en didáctica de la matemática, debe tener en cuenta el principio conocido como “navaja de Occam”, o principio de parsimonia, economía, o concisión, usado en lógica y resolución de problemas. Este principio afirma que, entre hipótesis competitivas, debería ser seleccionada la hipótesis con menos supuestos. En otras palabras, la explicación más simple es usualmente la mejor. La aplicación de la navaja de Occam al campo de la educación matemática justifica los esfuerzos realizados en el campo por comparar, articular y unificar teorías.

Pero también es necesario tener en cuenta la frase atribuida a Einstein: “Todo se debería mantener lo más simple posible, pero no más”, que puede considerarse como una formulación del principio conocido como “anti-navaja de Chatton”: “Si una explicación no determina satisfactoriamente la verdad de una proposición, y se está seguro de que es verdadera, se debe requerir alguna otra explicación”. La existencia de una multiplicidad de teorías en educación matemática es una consecuencia de la aplicación implícita de la anti-navaja de Chatton, mientras que los esfuerzos de comparación, articulación y unificación de teorías es resultado de la aplicación, también implícita, de la navaja de Occam. Parece conveniente reconocer que ambos principios no son contrapuestos y que una posición racional ante la multiplicidad de teorías debe ser explorar la sinergia que pueda haber dichos principios.

Considero necesario tratar de comparar, coordinar e integrar las teorías en un marco que incluya las herramientas necesarias y suficientes, respetando el principio fundamental de parsimonia metodológica. Este problema se puede formular en los siguientes términos:

Dadas las teorías T_1, T_2, \dots, T_n , focalizadas sobre una misma problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ¿es posible elaborar una teoría T que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las T_i ($1 \leq i \leq n$)?

Aunque no sea posible, o incluso deseable, tratar de construir una ‘teoría holística que lo explique todo’, la educación matemática puede progresar en la construcción de un sistema conceptual coherente y herramientas metodológicas que hagan posible los análisis de nivel macro y micro de las dimensiones epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y sus interacciones. Como sugiere Ruthven,

Esto implica adoptar un punto de vista modular, tanto con respecto a la descomposición de las teorías en componentes de herramientas analíticas y con respecto a la composición de herramientas provenientes de diferentes teorías; mediante la posibilidad de que una teoría tome prestadas herramientas de otra o de la improvisación de nuevos marcos que combinen herramientas de varias

teorías fuente para abordar un nuevo tipo de cuestión o un tipo antiguo de cuestiones de una nueva manera. (Ruthven, 2014, p. 278)

En este trabajo voy a presentar una síntesis de los análisis y reflexiones sobre distintas teorías usadas en educación matemática que han dado lugar a la emergencia del sistema teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero, & Font, 2019). En Godino (2017) se presenta el EOS como un sistema teórico modular e inclusivo que trata de proporcionar principios y herramientas metodológicas para abordar los problemas epistemológicos, ontológicos, cognitivos, instruccionales y ecológicos inherentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se han realizado diversas publicaciones en las cuales se estudian las concordancias y complementariedades entre el EOS y otros marcos teóricos. En este artículo haré una síntesis del trabajo de articulación de teorías que venimos realizando, identificando aspectos que se deben desarrollar.

El artículo incluye los siguientes apartados. Después de esta sección introductoria, en las secciones 2 y 3, abordo la cuestión de cómo se concibe la noción de conocimiento y saber en cuatro teorías de la didáctica francesa, problemática que motivó la emergencia del EOS con el trabajo sobre significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino & Batanero, 1994). Este trabajo y posteriores desarrollos del mismo (Godino, 2002) constituye una primera etapa de articulación de teorías centrada en los problemas epistemológicos, ontológicos y psicológicos en didáctica de las matemáticas. En la sección 4 describo los problemas educativo-instruccionales y de formación de profesores propios de la didáctica y las diferentes herramientas teóricas elaboradas en el marco del EOS para abordarlos. En la sección 5 describo de manera sucinta diversos trabajos de articulación de marcos teóricos desde la perspectiva del EOS como una segunda etapa de hibridación de teorías. Finalizo el artículo con algunas reflexiones sobre la hibridación y competición de marcos teóricos en educación matemática.

2. La cuestión de la unificación de teorías

En este apartado y en el siguiente voy a tratar de argumentar la necesidad y utilidad de articular teorías (internas y locales) sobre educación matemática, usando como ejemplo cuatro teorías bien conocidas en el ámbito de la “didáctica francesa”: la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC, Vergnaud, 1990; 2009), la Teoría de los registros de representación semiótica (TRRS, Duval, 1995; 1996), la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD, Brousseau, 1986; 1998) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, Chevallard, 1992; 1999). Las dos primeras centran la atención en la dimensión cognitiva (conocimiento individual o subjetivo) mientras las dos últimas lo hacen básicamente en la dimensión epistémica (conocimiento institucional u

objetivo). Consideramos, no obstante, que la consolidación de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecno-científica pasa por abordar cuestiones tales como:

- ¿Cuáles son los problemas, principios y metodologías que se abordan y usan en cada marco teórico?
- ¿Qué redundancias hay en las herramientas de estos marcos? ¿Son incompatibles entre sí?
- ¿Pueden convivir de manera sinérgica las herramientas cognitivas de un marco con las epistémicas de otro?
- ¿Sería útil construir un sistema teórico que tenga en cuenta las diversas dimensiones implicadas (epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica), evitando redundancias? ¿Cuáles serían las nociones primitivas y postulados básicos de dicho nuevo sistema?

Es claro que no podemos abordar aquí estas cuestiones, sino solo mostrar su pertinencia y la potencial utilidad de avanzar hacia un sistema teórico que articule de manera coherente los enfoques epistémicos y cognitivos, con el objetivo de lograr diseños instruccionales efectivos. Con ese fin describo brevemente algunas nociones básicas de estos modelos cuya clarificación, confrontación y articulación podría ser productiva. Solo se mencionan, de manera sucinta, cómo se concibe en estas teorías el *conocimiento*, desde el punto de vista epistémico en unas y cognitivo en otras. Este no es el lugar para hacer una comparación o posible articulación de estas teorías en sus diversos componentes; se trata de ejemplificar una estrategia de *networking*, basada en el análisis racional y posible hibridación de las herramientas conceptuales usadas en cada caso. Se deja fuera de discusión y articulación el sistema de resultados que los marcos teóricos hayan podido desarrollar.

Esta estrategia ha dado origen al denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS) en Didáctica de la Matemática, en un intento de articulación de las mencionadas teorías y otras relacionadas desde una aproximación que describen como ontosemiótica. Las teorías se pueden concebir bajo una doble perspectiva:

1. En un sentido restringido, como “sistema de herramientas” (conceptos, principios y metodologías) que se usan para responder a un conjunto de cuestiones propias de un campo de indagación; esta interpretación puede ser similar a la triplete propuesta en Radford (2008a) – Principios, Métodos y Cuestiones.
2. En un sentido ampliado, incluyendo además de los anteriores componentes, el “sistema de resultados” (saberes) que se van obteniendo como resultado de aplicar las herramientas a las cuestiones.

En principio, cualquier teoría puede producir conocimientos valiosos que ayudan a comprender el campo y actuar sobre el mismo de manera fundamentada. Pero las diversas teorías, pueden ser redundantes,

contradictorias, insuficientes, o más o menos eficaces para realizar el trabajo pretendido. La clarificación, comparación y posible articulación de teorías se orienta, por tanto, a la elaboración de un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas óptimo, que potencie la investigación en el campo. Se asume que tal articulación de teorías se puede hacer mediante el análisis racional de los elementos constituyentes de las teorías y la elaboración de *nuevas herramientas* conceptuales cuando la mera amalgama de las existentes no se considera posible o pertinente. Como trataré de mostrar esta estrategia de articulación ha dado origen a una nueva noción teórica para el análisis epistemológico, ontológico y cognitivo, la *configuración ontosemiótica* (Figura 1), que incorpora de manera híbrida elementos de las nociones de concepto, concepción, esquema, praxeología matemática y registro de representación semiótica.

3. Una primera etapa de articulación de teorías: Problemas epistemológicos, ontológicos y psicológicos en didáctica de la matemática

Aunque la didáctica de la matemática es una disciplina educativa y, por tanto, básicamente es una sociotecnología (Bunge, 1998), que debe buscar cómo mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es necesario que aborde previamente problemas de carácter científico, esto es, descriptivo, explicativo y predictivo. Como se describe en Godino et al. (2019) la didáctica de la matemática debe abordar los problemas epistemológicos: ¿Cómo emerge y se desarrolla la matemática?; ontológico: ¿Qué es un objeto matemático? ¿Qué tipos de objetos intervienen en la actividad matemática?; semiótico-cognitivo: ¿Qué es conocer un objeto matemático? ¿Qué significa el objeto para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

Estas cuestiones han sido fundamentales en la didáctica francesa y sus respuestas han sido el punto de partida de la teoría de los significados y configuraciones ontosemióticas del EOS.

3.1. La noción de conocimiento en la didáctica francesa

La contribución teórica de Duval (1995) se inscribe dentro de la línea de indagación que postula una naturaleza mental (las representaciones internas) para el conocimiento matemático, y que atribuye un papel esencial al lenguaje en sus diversas manifestaciones en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales (noesis). Se considera imprescindible en la generación y desarrollo de los objetos matemáticos la disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, pero la semiosis (producción y aprehensión de representaciones materiales) no es espontánea y su dominio debe ser un objetivo de la enseñanza. Una atención particular debe darse a la conversión entre registros

de representación semiótica no congruentes entre sí. La semiótica cognitiva elaborada por Duval aporta otras nociones útiles para estudiar los fenómenos del aprendizaje matemático [tipos de funciones discursivas y meta-discursivas del lenguaje, diferenciación funcional y coordinación de registros, etc. (Duval 1996)].

La TCC (Vergnaud 1990; 2009) ha introducido un conjunto de nociones teóricas para analizar los procesos de construcción del conocimiento por parte de los aprendices. Esta es la razón por la que consideramos a este modelo teórico dentro del programa cognitivo, reconociendo, no obstante, que algunas nociones teóricas elaboradas (campo conceptual) tienen una naturaleza epistémica. La noción cognitiva básica para Vergnaud es la de esquema. El esquema se describe como “la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas” (Vergnaud 1990, p. 136). El autor indica que “es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria”. Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas. Propone también una noción de concepto a la que parece atribuir una naturaleza cognitiva al incorporar en la misma los invariantes operatorios “sobre los que reposa la operacionalidad de los esquemas”. Esta noción es distinta de lo que son los conceptos y teoremas en la ciencia, para los que no propone una conceptualización explícita. En cuanto a la noción de campo conceptual, en una primera descripción se entiende como “conjunto de situaciones”. Pero a continuación aclara que junto a las situaciones se deben considerar también los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones.

Para la TSD el saber a enseñar tiene una existencia cultural, preexistente y, en cierta forma, independiente de las personas e instituciones interesadas en su construcción y comunicación. El análisis de los procesos de comunicación y reconstrucción de dichos saberes por el sujeto, bajo la forma de conocimientos, en el seno de los sistemas didácticos es el objetivo fundamental de la didáctica. La transposición didáctica, noción desarrollada en el marco de la TAD, da cuenta de las adaptaciones de estos saberes para su estudio en el contexto escolar, dando lugar a distintas variedades epistémicas de un mismo saber.

En cuanto a las nociones usadas en la TSD para referirse a los “conocimientos del sujeto” encontramos el uso de ‘representación’, en el sentido de representación interna; en otras ocasiones utiliza la expresión “modelos implícitos” para dichos conocimientos y representaciones. Se interpretan los modelos implícitos como “formas de conocimiento”, las cuales “no funcionan de manera completamente independiente, ni de manera completamente integrada, para controlar las interacciones del sujeto.

La TAD se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático. Las nociones de

organización matemática y relación institucional al objeto se proponen como los instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad. La dimensión cognitiva se describe en términos de la “relación personal al objeto”, que se propone como sustituto, en cierta manera, de las nociones propuestas desde la psicología (concepción, intuición, esquema, representación interna, etc.). Pero esta noción de relación personal al objeto no ha sido desarrollada, al postularse como previa y verse como determinante de las mismas la caracterización de las praxeologías matemáticas y el estudio de las relaciones institucionales al saber.

3.2. Significado y configuraciones epistémica y cognitiva en el EOS

La breve síntesis presentada de las nociones usadas en las cuatro teorías para describir el conocimiento matemático, desde el punto de vista institucional (epistémico) – saber, campo conceptual, praxeología matemática, relación institucional al objeto, etc. y personal (cognitivo) – conocimiento, concepción, esquema, representación interna, modelo implícito, relación personal al objeto, etc. – muestra que la simple superposición, o el uso indiscriminado de las mismas para describir los fenómenos de transposición didáctica y de aprendizaje matemático solo puede crear confusión.

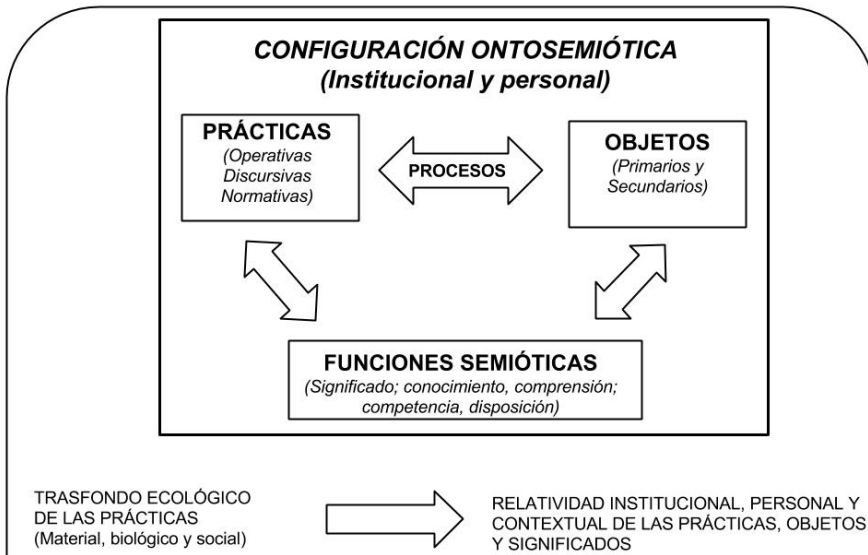
Esta es una de las razones por la que Godino y Batanero (1994) comenzaron a sentar las bases de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas, ontológicas y semióticas. Con un estilo que recuerda los trabajos de fundamentación axiomática de las matemáticas estos autores comenzaron definiendo las nociones primitivas de práctica matemática, institución, prácticas institucionales y personales, objeto institucional y personal, significado de un objeto institucional y personal, conocimiento y comprensión del objeto. Estas nociones fueron complementadas en trabajos posteriores (Godino 2002) con una tipología de objetos y procesos matemáticos primarios, así como con una interpretación de la noción de función semiótica (relación triádica entre dos objetos, antecedente y consecuente, según un criterio o regla de correspondencia) que permite elaborar una noción operativa de conocimiento (significado, comprensión y competencia) (Figura 1). Estas nociones pueden incluir a las correspondientes a los enfoques epistemológicos y cognitivos usadas en didáctica de la matemática, como se explica en Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006).

En la Figura 1 se destacan como elementos claves de la modelización epistemológica y cognitiva del conocimiento matemático que propone el EOS las nociones de práctica, objeto, proceso (secuencia de prácticas de las que emerge el objeto) y función semiótica (noción mediante la cual se relacionan las diversas entidades de manera referencial y operacional). Se puede pensar que con estos cuatro elementos se tiene una versión similar a la tripleta conceptual de la TCC, o a la de praxeología de la TAD. Sin embargo, en el

EOS se ha elaborado una tipología explícita de objetos (y de sus respectivos procesos) que permite realizar descripciones de la actividad matemática más analíticas y explicativas que las correspondientes a otros modelos teóricos.

Figura 1

Entidades primarias de la ontología y epistemología EOS



En concreto se propone que en las prácticas matemáticas intervienen los siguientes seis tipos de objetos: situaciones–problemas, lenguajes, conceptos (en su acepción de entidades que se definen),² procedimientos, proposiciones y argumentos. Además, estas entidades primarias se pueden contemplar desde cinco puntos de vista duales: personal – institucional; ostensivo–no ostensivo; extensivo–intensivo; unitario–sistemático; expresión–contenido (Godino, Batanero, & Font, 2007; Font, Godino, & Gallardo, 2013).

3.3. Concordancias y complementariedades

Las teorías mencionadas (RRS, TCC, TSD, TAD) dan un peso muy diferente al aspecto personal e institucional del conocimiento matemático y a su dependencia contextual. En el EOS se postula que los sistemas de prácticas y los objetos emergentes son relativos a los contextos de uso, a las instituciones en que tienen lugar las prácticas y a los sujetos implicados en las mismas

² Este uso de concepto–definición es diferente a concepto–sistema, que es el que modeliza la TCC. La noción de configuración ontosemiótica viene a modelizar al concepto entendido como sistema (tripleta conceptual).

(juegos de lenguaje y formas de vida, Wittgenstein 1953).

La descripción de los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto O se puede hacer de una manera global con la noción de “sistemas de prácticas personales”. Esta noción queda concretada mediante la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que O se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). Si en este sistema de prácticas distinguimos entre las que tienen una naturaleza operatoria o procedimental ante un tipo de situaciones–problemas, respecto de las discursivas, obtenemos un constructo que guarda una estrecha relación con la noción de praxeología (Chevallard, 1999), siempre y cuando le atribuyamos a dicha noción una dimensión personal, además de la correspondiente dimensión institucional.

Los modos de “hacer y de decir” ante ciertos tipos de problemas que ponen en juego, por ejemplo, el “objeto función” se proponen como respuesta a la pregunta “¿qué significa el objeto función?” para un sujeto (o una institución). Esta modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como configuración cognitiva asociada a un subsistema de prácticas, relativas a una clase de situaciones o contextos de uso, y las nociones de concepto–en–acto, teorema–en–acto y concepción, como componentes parciales constituyentes de dichas configuraciones cognitivas.

En el EOS la noción de concepción (en su versión cognitiva) es interpretada en términos de configuración ontosemiótica personal (que incluye los sistemas de prácticas personales, objetos, procesos y relaciones). En términos semióticos, cuando nos preguntemos por el significado de “concepción” de un sujeto sobre un objeto O (o sostenida en el seno de una institución) asignemos como contenido, “el sistema de prácticas operativas y discursivas que ese sujeto es capaz de manifestar y en las que se pone en juego el objeto”.³ Dicho sistema es relativo a unas circunstancias y momento dado y se describe mediante la red de objetos y procesos que se ponen en juego.

Así mismo, la comprensión y el conocimiento se conciben en su faceta dual personal – institucional, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas operativas, discursivas y normativas ante ciertos tipos de tareas problemáticas. El aprendizaje de un objeto O por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de O por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados.

En el EOS se ha elaborado una noción general de significado (Godino, Burgos, & Gea, 2021). El significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo–intensivo, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o

³ Esta es una interpretación creativa de la máxima pragmática de Peirce (1958).

a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.). La noción de sentido se interpreta como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

Las nociones de representación y registro semiótico usadas por Duval y otros autores hacen alusión, según el EOS, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos mentales (no ostensivos). La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos. Por ejemplo, la expresión ostensiva $y = 2x$ refiere a una función particular (entidad conceptual, no ostensiva). Entre ambas entidades se establece una función semiótica de tipo representacional.⁴ En otras situaciones la función $y = 2x$ puede estar en representación de la clase de funciones polinómicas de primer grado, o del concepto general de función. Ahora el antecedente y el consecuente de la función semiótica son entidades conceptuales. La función matemática $y = 2x$ se puede usar para modelizar determinadas situaciones prácticas, por ejemplo, para determinar el coste de x kilos de manzanas cuyo coste unitario son 2 €. En este caso prevalece el uso o significado pragmático del concepto de función: lo que significa $y = 2x$ es el sistema de prácticas en que tal objeto participa.

El uso que se hace en la TSD de la noción de sentido, desde el punto de vista del EOS, queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y las distintas situaciones fundamentales de las cuales emerge el objeto, y "le da sus sentidos" (podemos describirlo como "significado situacional"). Según el EOS, esta correspondencia es, sin duda, crucial, al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico. Pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto, entendido, bien en términos cognitivos, o bien en términos epistémicos.

La TCC extiende la noción de significado como "respuesta a una situación dada" introducida en TSD. Esta extensión supone la inclusión, además del componente situacional, de elementos procedimentales (esquemas) y discursivos (conceptos y teoremas) relacionando además el significado con la noción de modelo implícito. El contenido que se considera "significado de un objeto matemático para un sujeto" en la TCC es prácticamente la globalidad

⁴ La noción de función semiótica, en su uso referencial, se entiende como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia. El uso operacional o pragmático de la función semiótica indica el papel o rol que un objeto (antecedente) desempeña en una práctica matemática (consecuente) (Godino, Font, Wilhelmi, & Lurduy, 2011).

holística que en el EOS se describe como “sistema de prácticas personales”. Sin embargo, la noción de función semiótica y la ontología matemática asociada proporciona un instrumento más general y flexible para el análisis didáctico-matemático (Godino, Burgos, & Gea, 2021).

Un aspecto esencial que permite distinguir entre los modelos teóricos es el relativo a la dialéctica entre la dualidad institucional y personal, entre enfoques epistemológicos y cognitivos, los cuales con frecuencia se presentan disjuntos, dando lugar a posiciones extremas. En unos casos el acento se pone en la dimensión personal (TCC y RRS), en otros en la dimensión institucional (TAD y TSD), mientras que en el EOS se postula una relación dialéctica entre ambas dimensiones, por lo que pensamos puede ayudar a la articulación entre los restantes modelos teóricos.

4. Problemas educativos-instruccionales en didáctica de la matemática

En el marco del EOS se asume que para responder de manera científica a la problemática de qué matemáticas enseñar y cómo es necesario abordar las cuestiones generales de índole epistemológica, ontológica y psicológica mencionados anteriormente. Ello permite plantear de manera fundamentada las cuestiones propiamente didácticas, esto es, los problemas,

- Educativo-instruccionales: ¿Qué es la enseñanza? ¿Qué es el aprendizaje? ¿Cómo se relacionan?
- Ecológico: ¿Qué factores condicionan y soportan el desarrollo de los procesos instruccionales y qué normas los regulan?
- Optimización del proceso de instrucción: ¿Qué tipo de acciones y recursos se deberían implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático?
- Formación de profesores: ¿Qué conocimientos y competencias deberían tener los profesores para optimizar el aprendizaje en los procesos de instrucción en matemáticas?

En Godino et al. (2019) se describen los principios y herramientas metodológicas mediante los cuales se abordan estas cuestiones centrales de la investigación didáctica, entendida como campo de investigación científica y tecnológica. Con el enunciado conjunto de estas preguntas se muestra la complejidad de la optimización de los procesos de instrucción, ya que previamente se deben abordar estudios de índole epistemológica, ontológica, cognitiva, semiótica y ecológica.

4.1. Teoría de las configuraciones didácticas

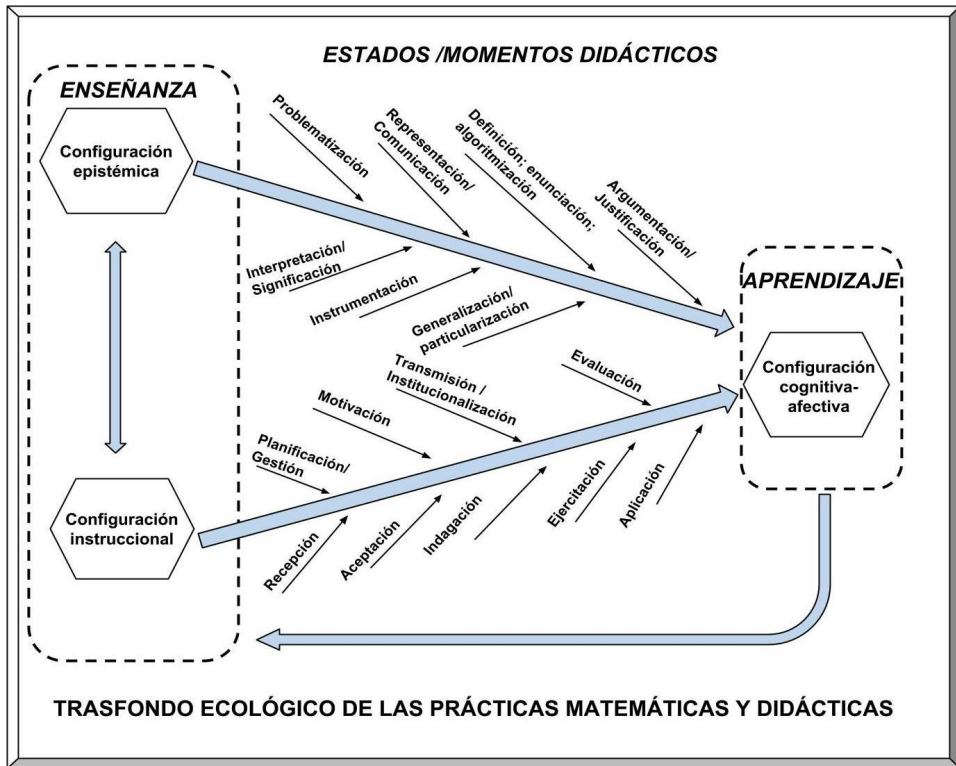
Para el análisis de los procesos de instrucción a nivel micro se ha elaborado en el EOS la herramienta *configuración didáctica* (Godino, Contreras, & Font,

2006). Se define como cualquier segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendido entre el inicio y fin del proceso de resolución de una situación–problema. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar la tarea. La Figura 2 resume los componentes y dinámica interna de las configuraciones didácticas, las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje y los principales procesos matemáticos ligados a la modelización ontosemiótica del conocimiento matemático. También se refieren algunos procesos didácticos ligados a la conexión entre las configuraciones instruccional y cognitivo–afectiva: planificación, motivación, institucionalización, evaluación, recepción, aceptación, indagación, ejercitación y aplicación. Otra herramienta metodológica para el análisis de la instrucción es la secuencia de configuraciones didácticas que constituye una *trayectoria didáctica*.

En toda configuración didáctica (Figura 2) se puede diferenciar tres componentes: a) una configuración epistémica (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea), b) una configuración instruccional (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes) y c) una configuración cognitiva-afectiva (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que le acompañan).

Figura 2

Componentes y dinámica de una configuración didáctica (Godino, 2014, p. 31)

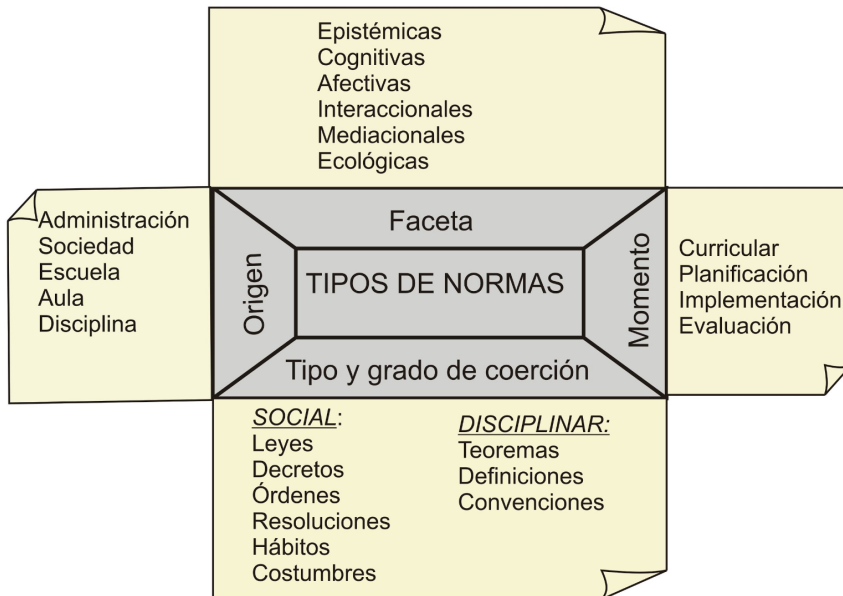


4.2. Teoría de la dimensión normativa

Los factores y normas que regulan el proceso de enseñanza y aprendizaje han sido objeto de investigación en didáctica de las matemáticas; estas últimas principalmente por los autores que basan sus trabajos en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1982). Se trata de tener en cuenta las normas, hábitos y convenciones, generalmente implícitos, que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas y que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes. En Godino, Font, Wilhelmi y De Castro (2009) se aborda el estudio sistemático y global de estas nociones teóricas desde la perspectiva del EOS, tratando de identificar sus conexiones y complementariedades, y reconocer nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Figura 3). Tanto los factores como las normas pueden referirse a las seis facetas que se deben tener en cuenta en el análisis de los procesos de instrucción: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica.

Figura 3

Tipos de normas (Godino, 2014, p. 38)



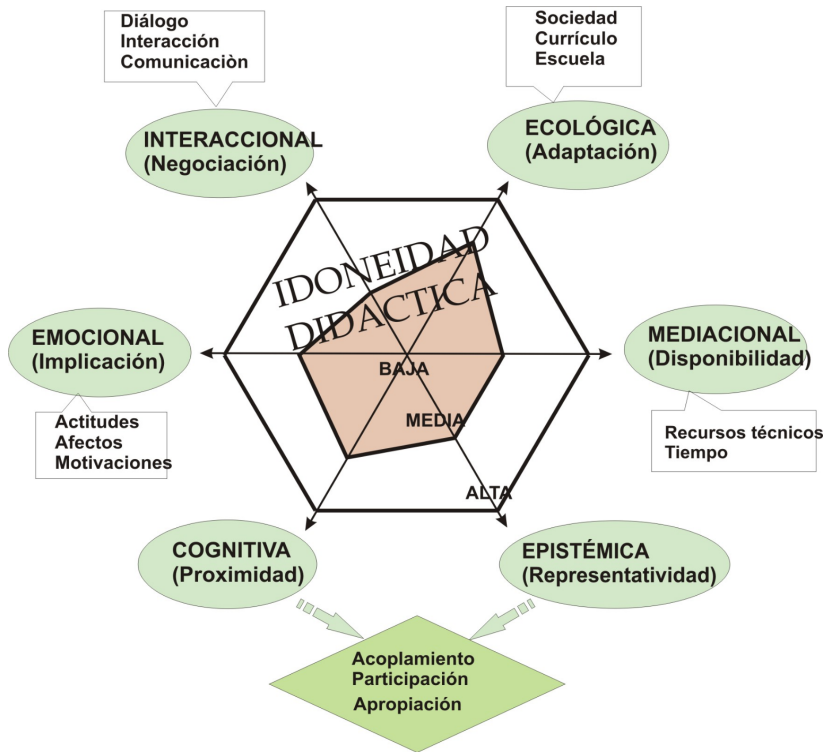
4.3. Teoría de la idoneidad didáctica

En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática (Godino et al., 2007; Godino, 2013). Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Figura 4).

Se parte de la base de que en las ciencias sociales y educativas es posible formular criterios de idoneidad, en la forma de juicios de valor, “Se debería hacer esto y no aquello”, en aquellas circunstancias en que dichos juicios de valor tienen carácter social y es posible explicitar un fundamento para su formulación. Conllevan una racionalidad, por lo que pueden ser objeto de escrutinio científico (Bunge, 1999; Rugina, 1998).

Figura 4

Idoneidad didáctica (Godino, 2013, p. 116)



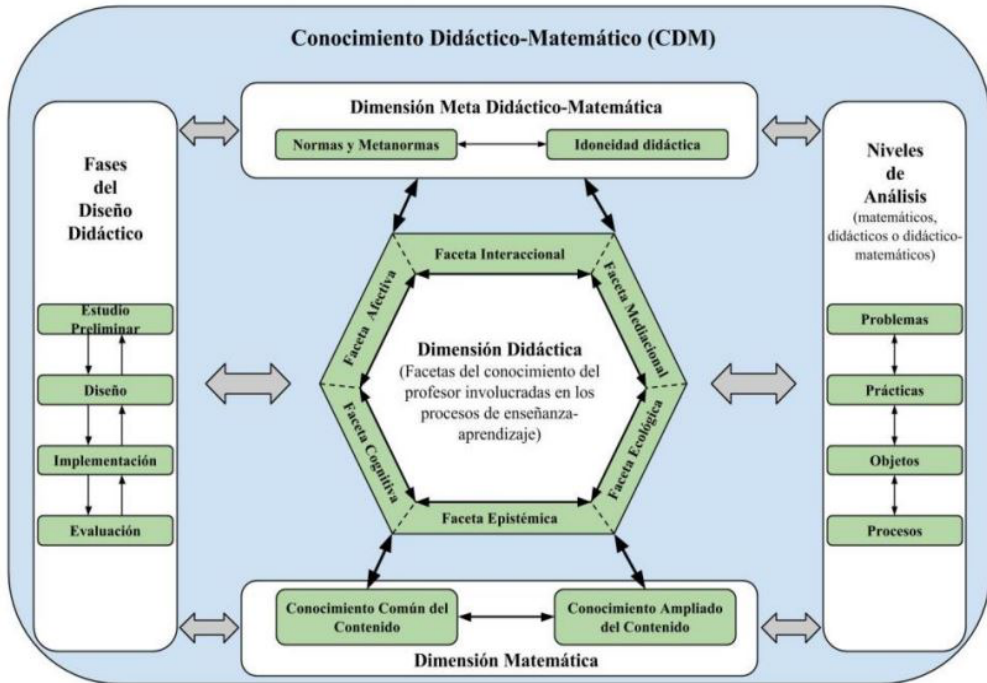
4.4. Formación de profesores: El modelo CCDM

La investigación en didáctica de las matemáticas como campo científico y tecnológico debe abordar el problema de la formación de profesores, como un medio fundamental de incidir sobre la práctica educativa. En consecuencia, se debe abordar la cuestión,

En el marco del EOS se ha desarrollado un modelo de conocimientos didáctico-matemáticos para la formación de profesores (Godino, 2009; Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017). La Figura 5 resume las dimensiones matemática, didáctica y meta-didáctica (D'Amore, Font, & Godino, 2007) que se deben tener en cuenta en dicho modelo, las fases del diseño didáctico (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación), las facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) y los niveles de análisis (problemas, prácticas, objetos y procesos). Este sistema de elementos proporciona criterios para categorizar los conocimientos didáctico-matemáticos que deben tener en cuenta los planes de formación de profesores de matemáticas.

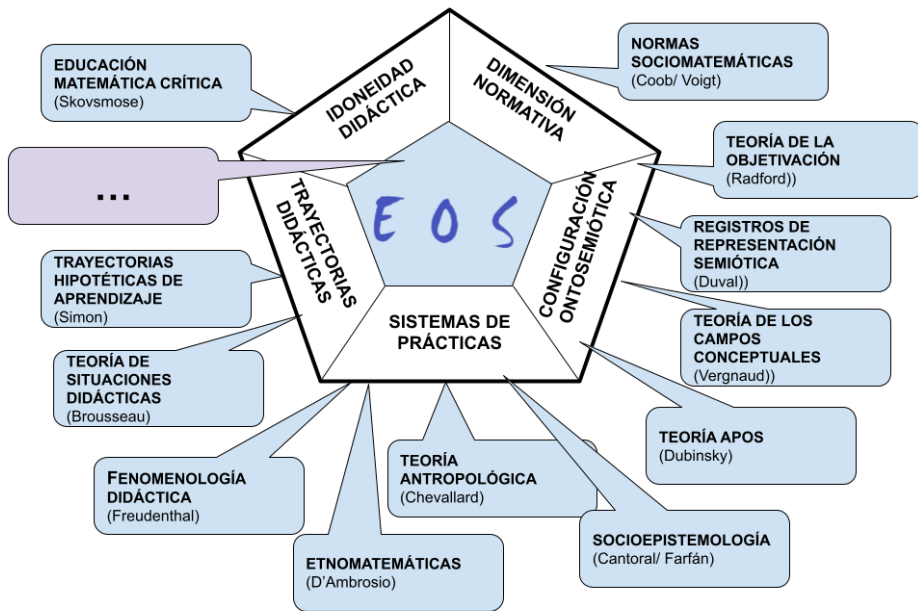
Figura 5

Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Pino-Fan & Godino, 2015, p. 103)



5. Segunda etapa de hibridación de teorías: Otros trabajos de articulación de marcos teóricos desde la perspectiva del EOS

En la Figura 6 se indica que las herramientas aportadas por el EOS se agrupan en cinco módulos o teorías parciales: Teoría del significado pragmático (sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas); Teoría de las configuraciones ontosemióticas (tipos de objetos y procesos y dualidades epistémico-cognitivas); Teoría de las trayectorias didácticas; Teoría de la dimensión normativa; Teoría de la idoneidad didáctica. Se menciona en dicho diagrama un conjunto de teorías usadas en educación matemática conectadas con los distintos módulos del EOS. No se pretende indicar que dichas teorías están incluidas en el EOS, sino que cada una de las teorías parciales del EOS guarda un 'parecido de familia' con dichas teorías y que, en cierto sentido, podrían ser 'acomodadas' en el EOS con adaptaciones más o menos intensas en algunos de los presupuestos y métodos de las teorías implicadas.

Figura 6*Asimilación y acomodación de teorías*

Este trabajo de asimilación y acomodación de teorías se ha iniciado en diversos artículos, aunque sin duda no se puede dar por concluido. En la sección 3 he descrito cómo las nociones de significado pragmático de un objeto matemático, configuración epistémica y cognitiva de objetos y procesos emergieron con la pretensión de articular nociones epistemológicas y cognitivas usadas en la didáctica francesa. Este trabajo de articulación se inició en Godino y Batanero (1994) y fue ampliado en Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) y D'Amore y Godino (2007), donde se presenta el EOS como un desarrollo de la TAD.

El papel de las representaciones internas y externas en el aprendizaje de las matemáticas es un tema que ha sido objeto de atención por diversos autores (Goldin, 2002). Los trabajos de Duval (2006) están relacionados también con esta problemática. Esta cuestión se aborda en el EOS al incluir el lenguaje, en sus diferentes registros, como uno de los elementos de las configuraciones ontosemióticas en interacción con los restantes tipos de entidades. Varios artículos han sido publicados donde abordamos la articulación del EOS con estas teorías (Font, Godino, & Contreras, 2008; Godino & Font, 2010; Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras, & Giacomone, 2016; Pino-Fan, Guzmán, Font, & Duval, 2015).

La teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) desarrollada por Dubinski y colaboradores (Dubinski, 1991; Cottrill et al., 1996) ha sido objeto de análisis y comparación con el EOS en varios trabajos publicados por Font y

colaboradores. En Font, Trigueros, Badillo y Rubio (2015) se compara y contrasta la manera en que se conceptualiza la noción de objeto matemática en la teoría APOS y el EOS. Como contexto de reflexión, se diseña una descomposición genética APOS para la derivada y se analiza desde el punto de vista del EOS. Los resultados de este estudio muestran algunos puntos en común y algunos vínculos entre estas teorías y señalan la naturaleza complementaria de sus construcciones. En Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez (2018) se analiza la comprensión de los estudiantes universitarios sobre la gráfica de una función y su derivada aplicando APOS y EOS.

Las nociones de contrato didáctico, norma social y sociomatemática son claves en distintas teorías didácticas, siendo diversa su conceptualización y ámbito de aplicación (Brousseau, 1988; Yackel & Cobb, 1996). En Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) hacemos una síntesis de los variados modos de entender el contrato didáctico y las normas en didáctica de las matemáticas, y desarrollamos una perspectiva que integra estas nociones, como parte de la «dimensión normativa de los procesos de estudio». La consideración de esta perspectiva, desde un enfoque ontosemiótico, da lugar a una categorización de las normas según la faceta de los procesos de estudio a la que se refieren las normas: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. Finalmente, mostramos cómo la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica de un proceso de estudio se integra junto a las normas matemáticas, sociales y sociomatemáticas en la dimensión normativa, incorporando una racionalidad axiológica en el análisis didáctico.

Comprender en profundidad los procesos de aprendizaje de los alumnos es uno de los principales retos de la investigación en educación matemática para lo cual se dispone de diferentes lentes teóricas. La cuestión es cómo se comparan y contrastan estas diferentes lentes, y cómo pueden coordinarse y combinarse para proporcionar una visión más completa sobre el tema de estudio. Para investigar esto, en Drijvers, Godino, Font y Trouche (2013), se analiza un episodio de clase con dos lentes teóricas, la perspectiva de génesis instrumental y el EOS. Los resultados de este análisis conjunto proporcionan una visión rica de los fenómenos observados y ayudan a identificar las posibilidades y limitaciones de cada uno de los dos enfoques teóricos y a articularlos.

El dilema entre modelos didácticos centrados en el estudiante (indagativos-constructivistas) o en el profesor (transmisivos-objetivistas) es abordado en el marco del EOS en diversos artículos (Godino, Rivas, Burgos, & Wilhelmi, 2019; Godino, Burgos, & Wilhelmi, 2020; Godino & Burgos, 2020). Teniendo en cuenta la complejidad ontosemiótica del conocimiento matemático se argumenta a favor de un modelo didáctico híbrido que requiere entretejer de manera dialéctica y compleja los momentos de transmisión del conocimiento con los momentos de indagación del estudiante. La implementación de trayectorias didácticas idóneas, implica la articulación de diversos tipos de

configuraciones didácticas gestionadas por el profesor mediante criterios de idoneidad, los cuales deben tener en cuenta las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

En Godino, Beltrán-Pellicer y Burgos (2020) abordamos el problema de la articulación de la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2008b; 2014) y el EOS. Como primera aproximación al problema, se describen los principios y conceptos básicos de ambas teorías y se identifican algunas concordancias y complementariedades. Para contextualizar la reflexión se usa el informe de una investigación empírica sobre interpretación de un gráfico cartesiano que representa el movimiento relativo, planteada en el marco de la TO. Aunque ambas teorías comparten principios socioculturales sobre la naturaleza de las matemáticas y los procesos de aprendizaje, este ejemplo permite reconocer el diferente énfasis que ponen ambos enfoques en el análisis de las dimensiones epistemológica, ontológica y semiótico-cognitiva, y las implicaciones de estas diferencias sobre la dimensión instruccional. Fandiño Pinilla (2020) analiza algunos puntos de contacto y divergencias entre TAD, TSD, EOS y TO. Sin duda, el encomiable esfuerzo iniciado en este artículo de encontrar similitudes entre estas teorías deberá ser continuado, profundizando en la clarificación de las identidades, límites y razón de ser de cada una de ellas.

En Rodríguez-Nieto, Font, Borji, & Rodríguez-Vásquez (2021) se presenta un trabajo de articulación de la Teoría Extendida de las Conexiones Matemáticas (ETC) y el Enfoque Ontosemiótico (OSA). Se identifican concordancias y complementariedades en las respectivas concepciones de las conexiones matemáticas, como resultado de aplicar estos marcos teóricos al protocolo de respuesta de un estudiante al resolver una tarea sobre la derivada. En primer lugar, se identificaron las conexiones matemáticas desde la perspectiva de la ETC y, en segundo lugar, se realizó un análisis ontosemiótico en el que se analizaron las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos primarios activados en ellas y las funciones semióticas establecidas entre estos objetos. La principal conclusión es que ambas teorías se complementan para realizar un análisis más detallado de las conexiones matemáticas. En particular, el análisis más detallado realizado con las herramientas del EOS, visualiza una conexión matemática como la punta de un iceberg de un conglomerado de prácticas, procesos, objetos primarios activados en estas prácticas y las funciones semióticas que los relacionan.

Sobre la problemática de la formación de profesores, en Godino (2009) se comienza a desarrollar el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos (modelo CDM) del profesor de matemáticas, revisado y ampliado en Pino-Fan y Godino (2015) y en Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017). Se parte de la bibliografía existente sobre el tema, en particular del modelo de conocimiento del profesor propuesto por Shulman (Shulman, 1986; 1987) y las adaptaciones realizadas por diversos autores al campo de la educación matemática, en particular del modelo MKT (Ball, 2000; Ball, Lubienski, &

Mewborn, 2001). Tras identificar algunas limitaciones en los modelos considerados proponemos un modelo que comprende categorías de análisis más finas de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, basado en la aplicación de las herramientas del EOS.

6. Reflexiones sobre la hibridación y competición de marcos teóricos

Como hemos indicado, con el EOS no se trata de construir una “teoría holística, que lo explique todo”, sino de avanzar en la construcción de un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas que permitan hacer los análisis de nivel macro y micro de las dimensiones epistémica, ontológica, cognitiva, instruccional y ecológica implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las interacciones entre las mismas. En el caso de las nociones epistémicas y cognitivas analizadas en la sección 3 se ha considerado que la mera superposición o amalgama de herramientas teóricas no es posible, dada su heterogeneidad y parcialidad, por lo que se ha procedido a la elaboración de una nueva entidad con un claro carácter híbrido. El constructo teórico configuración ontosemiótica (Figura 1) guarda un “parecido de familia” con las nociones de concepto, concepción, registro de representación semiótica, saber, conocimiento, praxeología matemática, pero no es reducible a ninguna de ellas, por lo que requiere una designación específica. Los autores consideran que esta noción puede hacer más eficaz el trabajo de las nociones matrices, al permitir analizar al nivel macro y micro la actividad matemática institucional y personal, y comprender mejor las relaciones entre ambas dimensiones del conocimiento matemático. Esta afirmación requiere, no obstante, un trabajo analítico y experimental más profundo que el realizado en esta breve presentación y el aportado en Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006).

Es claro que las nuevas entidades introducidas en el EOS entran en competición con las ya existentes, teniendo ante sí el difícil problema de probar su eficacia relativa para resolver las cuestiones paradigmáticas del campo. Es necesario avanzar en la comparación de los resultados que se puedan obtener con los marcos teóricos matrices y los nuevos constructos emergente, lo que constituirá la prueba de su posible supervivencia.

Aunque la articulación con otros marcos teóricos ha sido un tema central del EOS, como se refleja en las publicaciones realizadas, no obstante es necesario continuar con esta problemática, analizando las concordancias y complementariedades como fuente de mutuo enriquecimiento. No obstante, en este ámbito encontramos una dificultad crítica. La perspectiva holística del EOS, su carácter sistémico e inclusivo basado en la asunción de presupuestos no solo ontosemióticos, sino también pragmatistas, antropológicos y socioculturales, plantea una dificultad en su relación con otros marcos

teóricos. Parece natural, desde el punto de vista ecológico-social, que cualquier marco teórico, por ejemplo, la Etnomatemática (D'Ambrosio, 1985; Oliveras & Godino, 2015) o la Socioepistemología (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014), defiendan su propia identidad ante los intentos de asimilación y acomodación por el EOS (Godino, 2017).

El análisis ecológico esbozado de las nuevas ideas emergentes se debe complementar con el análisis sociológico correspondiente (Grugeon-Allys, Godino, & Castela, 2016); no es suficiente haber generado una nueva entidad híbrida potencialmente fuerte, es necesario que se den las circunstancias sociales y materiales para su desarrollo. Es necesario atraer a jóvenes investigadores que se involucren en el estudio, comprensión y aplicación de los nuevos instrumentos, y lograr atraer los recursos necesarios para realizar las investigaciones, comunicar, discutir y publicar los resultados.

Reconocimiento

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Referencias bibliográficas

- Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 241–247.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433–456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Bikner-Ahsbahr, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Cham: Springer International Publishing.
- Blumer, H. (1982). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método*. Barcelona: Hora.
- Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., & Sánchez, A. (2018). Application of the complementarities of two theories, APOS and OSA, for the analysis of the university students' understanding on the graph of the function and its derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(6), 2301–2315.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309–336.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91–116.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behaviour*, 15(2), 167–192.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer, A. P.
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44–48.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, 28(2), 49–77.
- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 191–218.
- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 23–49.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349–382.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2020). A proposito di relazioni fra teorie: Alcuni punti di contatto e altri di divergenza fra TAD, TSD, EOS e TO. *La matematica e la sua didattica*, 28(2), 159–197.
- Font, V., Godino, J. D., & Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing mathematics teaching and learning processes. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 157–173). Rotterdam: Sense Publishers.
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97–124.
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2015). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 107–122.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.

- Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2-3), 237–284.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13–31.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111–132.
- Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: Motivación, supuestos y herramientas teóricas. http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf
- Godino, J. D. (2017). Articulación de teorías socio-culturales en educación matemática desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. Conferencia plenaria. *RELME 31*, Lima, Perú.
http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/JDGodino_Conferencia_RELME_31
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 39(1-2), 127–135.
- Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., & Burgos, M. (2020). Concordancias y complementariedades entre la teoría de la objetivación y el enfoque ontosemiótico. *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 5(2), 51–66.
- Godino, J. D., & Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y las ciencias experimentales? Resolviendo el dilema de la indagación y transmisión. *Revista Paradigma*, 41, 80–106.
- Godino, J. D., Burgos, M., & Gea, M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.
http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_Burgos&Gea_Theories_of_meaning_2021.pdf
- Godino, J. D., Burgos, M., & Wilhelmi, M. R. (2020). Papel de las situaciones didácticas en el aprendizaje matemático: Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(1), 147–164.
- Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39–88.
- Godino, J. D., & Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 9(1), 189–210.
- Godino, J. D., Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 117–150.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. de (2009). Aproximación a la

- dimensión normativa en didáctica de la matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247–265.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90–113.
- Godino, J. D., Rivas, H., Burgos, M., & Wilhelmi, M. D. (2019). Analysis of didactical trajectories in teaching and learning mathematics: overcoming extreme objectivist and constructivist positions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(1), 147–161.
- Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A., & Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 91–110.
- Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In Lyn D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197–218). London: Lawrence Erlbaum
- Grugeon-Allys, B., Godino, J. D., & Castela, C. (2016). Three perspectives on the issue of theoretical diversity. In A. Kuzniak, B. R. Hodgson, & J.-B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 57–86). Berlin: Springer.
- Oliveras, M. L., & Godino, J. D. (2015). Comparando el programa etnomatemático y el enfoque ontosemiótico: Un esbozo de análisis mutuo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(2), 432–449.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87–109.
- Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., & Duval, R. (2015). The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Ed.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33–40). Hobart, Australia: PME.
- Prediger S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM - Mathematics Education*, 40(2), 165–178.
- Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. 1931–1935. Cambridge, MA: Harvard UP.
- Radford, L. (2008a). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM - Mathematics Education*, 40(2), 317–327.
- Radford, L. (2008b). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Sense Publishers.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de*

Etnomatemática, 7(2), 132–150.

- Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, M. (2021). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071>
- Rugina, A. N. (1998). The problem of values and value-judgments in science and a positive solution: Max Weber and Ludwig Wittgenstein revisited. *International Journal of Social Economics*, 25(5), 805–854.
- Ruthven, K. (2014). From networked theories to modular tools? In A. Bikner-Ahsbals & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 267–279). Springer International Publishing.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133–170.
- Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52(2), 83–94.
- Wittgenstein, L. (1973). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.

Mathematics teaching and learning as an ethical event

Insegnamento e apprendimento della matematica come un evento etico

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como un evento ético¹

Luis Radford

Laurentian University, Ontario, Canada

Abstract. *The main claim of this article is that mathematics teaching and learning is unavoidably an ethical event. This claim is based on the idea that teaching and learning rests on (1) relations between individuals (e.g., relations of power, relations of solidarity) and (2) the legitimation of particular forms of knowledge and knowing. From an educational viewpoint, the question that arises in this context is the kind of ethics that mathematics pedagogies could strive to nurture. The answer, it is argued, depends on the educational theory or theories to which one resorts to understand teaching and learning. The article ends with a sketch of a communitarian oriented relational ethics as articulated in the theory of objectification—a communitarian ethics whose practice features responsibility, commitment, and care.*

Keywords: ethics, theory of objectification, Vygotsky, Spinoza, Lévinas, Hegel.

Sunto. *L'affermazione principale di questo articolo è che l'insegnamento-apprendimento della matematica costituisce inevitabilmente un evento etico. Questa affermazione si fonda sull'idea che l'insegnamento e l'apprendimento si basano su (1) relazioni tra individui (per esempio, relazioni di potere, relazioni di solidarietà) e (2) sulla legittimazione di particolari forme di conoscenza e sapere. Da un punto di vista educativo, la domanda che ci si pone in questo contesto è il tipo di etica che le pedagogie matematiche potrebbero sforzarsi di coltivare. La risposta, si sostiene, dipende dalla teoria o dalle teorie educative a cui si ricorre per comprendere l'insegnamento e l'apprendimento. L'articolo termina con uno schizzo di un'etica comunitaria orientata all'etica relazionale come si articola nella teoria dell'oggettivazione – un'etica comunitaria la cui pratica caratterizza responsabilità, impegno e cura.*

Parole chiave: etica, teoria dell'oggettivazione, Vygotskij, Spinoza, Lévinas, Hegel.

Resumen. *La afirmación principal de este artículo es que la enseñanza-aprendizaje*

¹ Invited article/Articolo invitato/artículo invitado.

de la matemática constituye inevitablemente un evento ético. Esta afirmación se apoya en la idea de que la enseñanza y el aprendizaje se basan en (1) las relaciones entre individuos (por ejemplo, las relaciones de poder, las relaciones de solidaridad) y (2) en la legitimación de formas particulares de conocimiento y saber. Desde un punto de vista educativo, la pregunta que surge en este contexto es el tipo de ética que las pedagogías matemáticas podrían esforzarse por cultivar. La respuesta, se argumenta, depende de la teoría o teorías educativas utilizadas para entender la enseñanza y el aprendizaje. El artículo termina con un esbozo de una ética comunitaria orientada a la ética relacional tal como se articula en la teoría de la objetivación – una ética comunitaria cuya práctica caracteriza la responsabilidad, el compromiso y el cuidado.

Palabras claves: ética, teoría de la objetivación, Vygotsky, Spinoza, Lévinas, Hegel.

1. Introduction

The first question that might arise is the following: What does ethics have to do with mathematics education? Let me present a short twofold answer.

First answer

Teaching-learning mathematics cannot avoid facing the question of the *legitimation* of particular forms of knowledge and knowing that arise in the classroom. Classroom discussions usually lead to *conflicting views* about what counts as mathematically valid and authentic.

Here is an example. In a Grade 5 class (10-11-year-old children), the students were invited to write a text for a student from another class explaining how to solve linear equations. The students had been using an iconic semiotic system (ISS) to write and solve simple equations:

$$\{ \text{envelope}, \square, = \}.$$

In the ISS, the small rectangles represented cards; the envelope represented the unknown (as each envelope contained the same unknown number of cards). The problems with which the students had been dealing so far involved two individuals (e.g., Claudine and Sylvain) who each had a known number of cards and one or more envelopes. The individuals' total number of cards was the same.²

Some students suggested a text based on a concrete example (see Figure 1, left, where the text revolves around the equation:

$$\text{envelope} \square \square \square \square \square \square = \text{envelope} \square \square \square \square \square \square$$

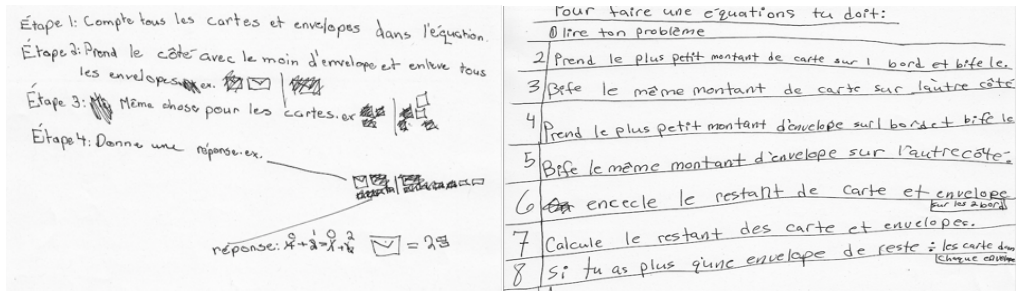
where the two sides of the equations were divided by a vertical line). But other students suggested a text without any concrete example (see Figure 1, right).

Which text is better? And if you were teacher, what would you say to the students?

² For an example of the classroom equation activities, see, e.g., Radford, Demers, and Miranda (2009).

Figure 1

Two mathematical texts. Which one is better?



Since there are plenty of ways in which to think mathematically, taking sides or suggesting something else involves a question of power, and since there is a question of power there is also a question of subjecting people to a *particular* image of mathematics.

Second answer

My second answer is not about positions taken on questions of mathematical legitimacy but about *relations* between people.

Teaching-learning mathematics in the school involves *interaction* between people. Teaching-learning is based on relations with others, and these relations involve *necessarily* an ethical dimension: In classroom interaction we have, for instance,

- relations of power and subjection,
- relations of *authority* and *obedience*, and
- relations of *solidarity* and inclusiveness.

Here is an example. In a Grade 4 classroom (9-10-year-old children), the students were working in small groups of three or four trying to solve geometric problems. The first problem revolved around the classical question of whether squares are rectangles. The pictures in Figure 2 provide a sample of *body positions* of the interaction. In Picture 1, Laura is talking to Sandra: “Yes, but they have all four sides.” In Picture 2, Mirna tries to contribute to the group and says: “The squares have same umm ... the same edges ...” Laura turns to look at Mirna for a short period of time; then, turns back to look at Sandra to continue their discussion. In Picture 3, Híria (front left) tries unsuccessfully to get Sandra’s and Laura’s attention and says: “The squares have parallel faces ... because there is ... Look!” In Picture 4, after recurring attempts to be heard, Mirna expresses her frustration and utters an anguished “Ahhhhh!!!”

Figure 2

A group of Grade 4 students dealing with a geometry problem



We are here in the presence of an ethics of exclusion. The practice of an ethics of exclusion impedes a genuine collective engagement in mathematics and raises an invisible, yet important, wall between *us* and *them*.

The previous examples illustrate the main idea of this article: teaching-learning is unavoidably an *ethical* event—and this is so regardless of the pedagogical model that underpins it.

I would like to go a step further and contend that ethics is not only omnipresent in mathematics teaching and learning but is also a crucial component of it. Indeed, first, ethics shapes the manners in which teachers and students *engage* and *assume* (or not) certain *responsibilities* in the mathematics classroom; consequently, ethics shapes how teachers and students come to understand mathematics and conceive of themselves as practitioners of mathematics. Second, ethics shapes the *students' and teachers' relationships with others*—for instance, in the various manners by which the students voice (or not) their values and understandings, and how their voice is heard (or not). In this sense, ethics affects how teachers and students assert themselves as mathematical *subjectivities*.

The importance of ethics in an encompassing account of learning leads us to the question of the kind of ethics that we could nurture in the classroom. In this article I sketch a conception of ethics as articulated in the theory of objectification—a teaching and learning theory inspired by dialectical materialism and Vygotsky's school of thought (Radford, 2019a, 2021a). In this ethics we move away from contractualist conceptions of ethics, such as Thomas Hobbes's, where individuals give and take to preserve the social order and their order in it (see, e.g., Hobbes, 1841; analysis in Radford, 2021a). We also move away from the idea of ethics as something based on principles that can be universally applicable, as in Immanuel Kant's rational morality (see, e.g., Kant, 2006; analysis in Radford 2021a). We rather resort to a concept of ethics as something that is materialized as we engage in the world (Roth,

2013, 2017) and that is intrinsically *ambiguous* and *context sensitive* (Bauman, 1993; Boyland, 2016): a *communitarian relational ethics* whose practice features responsibility, solidarity, and care.

Before I go into the account of ethics in the theory of objectification, in the next section I deal briefly with what *makes ethics possible* in the first place.

2. The possibility of ethics: Free will

The starting point is that, in a very fundamental ontological sense, we are beings of choice. We are beings of free will. This means that, every moment, our deeds can take one direction or another direction. If we were compelled to always carry out certain actions, like machines, ethics would not arise. It is because we can choose our actions, it is because of our free will, that ethics arises.

It is precisely not in the cognitive sphere but in the *scope* of the exercise of free will that Vygotsky found the most distinguishing feature of humans within the broad spectrum of natural living beings (del Rio & Alvarez, 1995). Free will manifests itself in the “struggle of motives” (Vygotsky, 1997, p. 167). Individuals, Vygotsky says, “never sense themselves as free to act on their own as when they confront several possibilities and actions simultaneously and, as if in a free act of will, make a choice between them” (p. 168; citation grammatically adjusted). This is why ethics “will always be that which is associated with the free choice of social forms of behavior” (Vygotsky, 1997, p. 226). Commenting on Spinoza’s view, Vygotsky goes on to say that, according to the Dutch philosopher, “if a person runs away from something on the grounds that it is bad, he is acting like a slave. Only that person is free, in Spinoza’s view, who runs away from something because something else is better” (Vygotsky, 1997, p. 226).

Of course, Vygotsky does not see free will as something unbounded. On the contrary, for him, humans will always stand within the confines of the social and political order. So, the discursive and non-discursive practices and technologies that underpin and shape our world do constrain, afford, and promote certain forms of action and choice. However, these practices do not impede us from thinking and acting *differently*. There are always possibilities to *interrupt* the quotidian train of our actions and thinking. It is at this point that Scott’s (1990) *The Question of Ethics* as a question of *interruption* of habits and values acquires its whole sense. For Scott, *The Question of Ethics* indicates our capacity to bring forward “an interruption in which the definitive values that govern thought and everyday action lose their power and authority” (p. 4). This interruption makes sense precisely because of our cultural-historical *agentic* nature (i.e., our power to sublimate and surpass the cultural and historical possibilities on which we draw when we re-act to, and re-enact, the world).

This agentic nature does not derive from a privileged position that makes the subject the *source* of meaning and intentionality, as articulated by the rationalist and empiricist trends of the Enlightenment. Nor does the agentic nature remain confined to “the effect of the subject-positions articulated in discourse” (Atkins, 2005, p. 252)—a theoretical conception that, as Nealon (1998) argues, rests on an idea of self as *lack*: lack of wholeness or plenitude, subjected forever to the limits of the given structures and confining discourses.

Historically speaking, feminist, multiculturalist, dialectical materialist thinkers and scholars in related fields have countered these two conceptions of agency mentioned above:

- (1) self as *source*—i.e., as the origin of meaning, knowledge and intentionality, the self that is featured in Piagetian and constructivist accounts and that gets caught in a solipsist world unable “to look behind its back to see what unacknowledged truth its own activity is reflecting” (Russon, 2004, p. 187), unable thus to recognize that the alienating confinement it finds itself in is the product of a range of social determinations—and
- (2) self as *lack*—i.e., as a being that, as in the case of self as source although without claiming to be the origin of cognitive life, is unable to challenge and transform the cultural-historical structures that confine it.

These scholars have countered these conceptions of self and agency by offering a concept of the subject as *excess*. In feminist theory the subject is conceived of as having the power “to reflect on the social discourse and challenge its determinations” (Alcoff, 1988, p. 417). Following a Hegelian thread, for Butler (1999), the subversion of the subject is possible because all acts of signification not only restrict the subject’s actions but are, at the same time, in their enactment, always located within the possibility of a variation in the “alternative domains of cultural intelligibility” (p. 185). Dialectical materialist thinkers (e.g., Fischbach, 2014; Macherey, 2008), have drawn on Marx’s (1998) work where the subject is featured as one that, while being produced by its circumstances, has, inversely, the power to transform those circumstances. Following Marx, what dialectical materialists add to the agentic conception of the self is that subversion is accomplished in *praxis*, *with others* (Freire, 1998). For consciousness is not only a refraction of reality. Most importantly, consciousness, along its varying layers of depth, is a concrete relation that, given our biography and cultural background, *propels us* towards the world and leads us to act on/in it and *transform* it (Clot, 2015). There is still hope, then, that, in our Grade 4 example, Mirna and her twin sister, Híria, will be heard. However, for this to occur, there must be a transformation of circumstances. The classroom culture must be transformed. This transformation requires a new *praxis*, a classroom praxis, out of which a

new form of social consciousness can emerge.³

3. Ethics in the theory of objectification

In the introduction I mentioned that one of the main features of ethics as conceived of in the theory of objectification is that it is intrinsically *ambiguous*. To be ambiguous means that ethics is not something contractual (like teachers do this, students do that), nor is it something that works on the basis of rules and abstract principles (like *do your homework!*). To say that ethics is intrinsically ambiguous means that our acts and relations to others do not have *one* obvious meaning. They are context sensitive. So, ethics is a context-sensitive dynamic and open-ended relational stance that is continuously materialized and assessed as teachers and students engage in mathematical activity.

The idea of ethics as ambiguous and context sensitive might be better understood if we bear in mind that ethics in the theory of objectification follows a Vygotskian-Spinozist line of monist thinking that relates ethics to *consciousness* and *emotions*.

Consciousness comes into the scope of ethics as that which can help us understand the meaning of our deeds, to reflect on them, and to imagine *new* courses of action. Consciousness is at the heart of what Spinoza called the body's *power* of acting in the world (*agendi potentia*).

Since Spinoza thought of individuals as *bodily sentient beings*, the individuals' deeds and thoughts have unavoidably an *emotional* dimension. Thus, "every man [*sic*], according to his emotions (*ex suo affectu*), judges a thing to be good or bad, useful or useless" (Spinoza, 1989, p. 153). More generally, "having an idea is at the same time being in an affective state" (Bijlsma, 2014, p. 7). But Spinoza's ethics stresses another fundamental point: we, humans, are primarily continuously affected by our contexts; we are inter-reliant in the ways we come to know and feel toward each other. He offers a picture of human beings "as fundamentally interdependent beings, whose passions and opinions are continuously aroused, reinforced and transformed by those of their fellows" (Bijlsma, 2014, p. 10).

The theory of objectification also follows Lévinas's (1982) *relational* ethics that radicalizes previous ethical systems in acknowledging that our actions and deeds are always modulated by the presence of the *Other*—a presence that comes to us in a sentient and fleshy manner: through the *proximity of our bodies*. In this proximity our conceptual epistemological categories and mechanisms are put on hold, and we encounter the Other as is. "The Other is appreciated precisely *as* Other, in her radical alterity and

³ The idea of the transformative praxis was quickly sketched in Thesis 3 of Marx's *Theses on Feuerbach*. For an enlightening analysis see Macheray (2008); see also Fischbach (2015).

irreducible singularity, only when thought renounces its totalitarian hubris and learns to think of the Other on her own terms . . . ‘beyond essence’” (Min, 1998, pp. 573–574; emphasis in the original). In giving an ontological primacy to the Other, Lévinas’s ethics removes the self from the privileged seat with which it has been traditionally endowed and from where it has conceived of itself as a constituting consciousness and the principle of the ethical relationship. In Lévinas’s ethical account, it is not from the self and its deeds that ethics appears. Stripped of its imperialism, the self appears conceived of as the *result* of an ethical relationship.

Drawing on those insights, ethics in the theory of objectification is understood as the *form* of *alterity* (the *form* of our relationship to the Other). The term “form” is used here in its dialectical materialist sense: just as there are forms of property and forms of society, there are forms of human relations. Forms are the very expressions of the social, cultural, and historical backgrounds that frame them.

In conceiving of ethics as the form of alterity, the focus turns not to moral precepts but rather to the fluid and content-dependent relationships between subjects as they appear in the immediacy and banality of everyday life. In this view, ethics is continuously *materialized* in *praxis* out of a myriad of possibilities, for, in this view, the individual appears as “full of unrealized possibilities every minute” (Vygotski, 2003, p. 76). If we come back to Figure 2, we see that Mirna’s teammates could have opted for other actions. The materialization of the students’ *actions* reflects their understanding of the context (*consciousness*) and the manner in which the context is lived through their unfolding collective affective experience (*emotions*), as well as the relational stances (*ethics*) they (consciously or not) adopt towards each other. Through the previous classroom examples, we see that embodied, emotional, contextual, cultural-historical action is related to ethical postures that students assume and show in practice.

In the introduction I claimed that all educational theories resort to a certain ethics, explicitly or implicitly. This is so because *the ethics of a theory reflects on the realm of social relations, the manners in which the theory expects teaching and learning to occur*. It is, indeed, from this expectation about learning that roles and relations become assigned to the participants.

Let us consider two examples.

Think of the theory of transmissive instruction. Learning is conceived of as the assimilation, through practice and repetition, of knowledge that the teacher possesses. The theory positions teachers as knowers and the students as lacking knowledge. The ethics of the transmissive instruction, manifesting itself in the form of alterity that it promotes, reflects, but also operationalizes, the ensuing alienating relations of power and subjection, relations that are thematized along the lines of superior/inferior, potent/impotent, knower/ignorant, authority/vassal (Radford & Lasprilla Herrera, 2020).

Now think of constructivism. In contradistinction to theory of transmissive instruction, constructivism, is based on an ethics that stresses the freedom of the student: since knowledge is conceived of as what results from the autonomous deeds of the student, and learning is the very process of the student's subjective construction of knowledge, teachers and students are positioned otherwise: the student's freedom and autonomy configure the constructivist's ethical space (Radford, 2012).

In the theory of objectification, learning is conceived of differently from constructivist and transmissive instruction theories: learning is seen as a *collective* and *truly social* embodied and material process through which students critically encounter culturally and historically constituted ways of thinking mathematically. This encounter happens in what the theory terms *joint labour* (Radford, 2020).

Joint labour is a sensuous, practical, material *activity*—activity understood as driven by *collective* concerns. The German and Russian languages have a specific term for this type of activity: *Tätigkeit* and *deyatel'nost'*, respectively. Activity in this sense is opposed to activity as being merely busy with something (as in watching TV). Again, the German and Russian languages have a specific term for this other type of activity: *Aktivität* or *aktivnost'*. Unfortunately, in the translation into English (and several other languages), the distinction is lost and both types of activity are rendered as *activity*. In the case of the theory of transmissive instruction, classroom activity is not oriented towards the satisfaction of collective needs. This activity corresponds hence to *Aktivität* or *aktivnost'*. In joint labour, by contrast, students and teachers work hand in hand to *produce* something *together*, what Hegel termed “a common work,” in our case, *mathematics*. It is this sense of labouring together (as opposed to simply interacting or exchanging with others) that makes joint labour a truly social activity and learning a collective process. Classroom research has shown us, however, that for learning to become a truly collective process, radical changes in the classroom culture might need to occur. Often, drawing on experiences shaped by transmissive instruction, the students conceptualize the teacher as the possessor of knowledge and power, and conceptualize themselves as submissive to the teacher and her knowledge, even when the teacher tries to conceptualize herself differently and encourages the students to learn collectively and organizes the classroom into small groups. Often, the students configure small, enclosed groups and erect aggressive or exclusive antagonistic barriers between their group and other groups—they resort to what we may term a *clique ethics* or *gang ethics* (Radford & Lasprilla Herrera, 2020), which is also what we see in the example from the Grade 4 classroom briefly mentioned in the Introduction.

Of course, the educational problem around ethics is not the imposition of new social forms of conduct. “It is not obedience to someone or obedience to

something, but the free adoption of those patterns of behavior which will vouchsafe the consonance of all of behavior” (Vygotsky, 1997, p. 233). The educational problem around ethics becomes the problem of the creation of classroom conditions for new ethical relations (new *forms* of alterity) to emerge and to be collectively pondered and discussed against the always contested background of culture and history.

Now, the new ethical relations that our pedagogies could strive to nurture need to be congruent with the theoretical tenets of the theory. In the case of the theory of objectification, the educational problem becomes the problem of the creation of classroom conditions that, moving within a critical space of engagement, inclusiveness, debate, and respect, would be conducive to a *collective* practice of mathematics.

Of course, the teacher does not do the same things as the students. Yet, the teacher alone cannot produce mathematics, for this production, according to the tenets of the theory, is sought to be a *collective* production. The teacher finds herself in the same position as the conductor of an orchestra who might know a musical piece from A to Z but is not able to produce music by herself. Like the orchestra conductor who needs her musicians, the teacher *needs* the students (Radford, 2019b). This need is not merely practical. It is ontological, for in producing mathematics the teacher produces herself: she produces herself in her dealings with the students—and vice versa. This is why teachers and students co-produce themselves. The teacher is a difference between the equal, and an equal among the different. And so are the students.

In this view of learning as a collective process, the teacher is dethroned from the traditional role that sociocultural theories and other theories bestow upon her: that of a mediator or a scaffolder or a helper or a coach. This patriarchal role is replaced with one in which the teacher struggles, suffers, and finds enjoyment with the students in making mathematics a sensible common work.

So, what are the new ethical relations that we strive to nurture in the theory of objectification? We focus on a classroom mathematics practice featuring what we call a *communitarian ethics* based on responsibility, commitment, and care. It is here where we resort to the construct of “voice”—not voice in a linguistic sense exactly; rather we resort to voice as something that brings in the postmodern notion of *difference* and the *primacy of the political* (Giroux, 2005). Finding one’s voice or having a voice is “moving from silence into speech,” it is “a gesture of defiance that heals, that makes new life and new growth possible” (Hooks, 2015, p. 29), something that “assumes a primacy in talk, discourse, writing, and action” (p. 33). Coming back to our Figure 1, when Mirna utters an anguished “Ahhhhh!!!” and moves her right hand towards the two other girls who are not listening, she is moving into speech to express her frustration about not being counted and heard. Her voice (which is much more than what she discursively *says*, as it also says things in her body

posture, facial expression, pitch, gesture) opens up new possibilities for action (for herself and the other teammates). Mirna's embodied utterance is, indeed, a *call* to the Other.

3.1. *Responsibility*

The call now must be responded to, and it is responded to within a certain node of social relations that tie the students together. Whatever path the teammates' response takes, it is cast in a general ethical attribute that Lévinas calls *responsibility*. For Lévinas, responsibility is “the essential, primary, and fundamental structure of subjectivity ... [where] the very node of the subjective is knotted” (1982, p. 101). Since all educational theories put into motion a certain ethics—for ethics is the substrate and form of our relation to the Other—responsibility is a common denominator of all of them. Yet, the *meaning* of responsibility is not the same. In the theory of direct instruction, the theory dictates that responsibility lies with the student to assume the submissive role vis-à-vis the teacher. In the case of the theory of objectification, responsibility means living and acting *with* and *for* others; it means to respond to the call of others as they are on their own terms: in their “existence, in [their] being-for-other[s] . . . as free being[s]” (Hegel, 1978, p. 57).

3.2. *Commitment*

Commitment is both a promise and its realization of doing everything possible to work side by side with others in the course of our joint labour (e.g., trying to understand the process being followed to solve a problem, trying to contribute to the classroom common work).

3.3. *Care for others*

Far from being an act of condescension or a patriarchal act, or simply caring for someone, the care for others is a pre-conceptual relational involvement entailing the attention and recognition of others and their material and spiritual needs. Although caring for the Other opens up the possibility of seeing ourselves in the Other, of recognizing our vulnerability in the vulnerability of the Other, the importance of caring for the Other is to go beyond ourselves, to be dragged powerfully into the world and to position ourselves there, with-the-Other.

To understand Mirna's “Ahhhhh!!!” within an ethical practice of responsibility, commitment, and care, we need to broaden our conception of language and *recognize* (in the Hegelian sense) this painful expression as *voice*; that is, as something where, as Lévinas suggests, the *saying* moves beyond the totalizing enclosure of the *said* and becomes rather the possibility of openness to the other (Radford, 2021a). In this conception of voice, power does not disappear since power is not a *thing*, but something imbricated in our

relations to others. What we can expect in the transformative movement towards a communitarian ethics is that, through conscious, reflective, and critical stance, power in the classroom goes beyond its own subjecting mechanisms of social order and becomes rather something fluid, dynamic, to be exercised with responsibility *for* the Other.

The communitarian ethics sketched here orients our pedagogical acts in the classroom, where teachers and students explore together new critical spaces that promote engagement, inclusiveness, debate, and respect (Radford, 2021b). This ethics is consonant with the conceptual bases of the theory of objectification and its conception of learning as a collective process. The communitarian ethics tries to reflect and operationalize the theory's conceptual stance in the kind of relationships between self and other. Underneath the communitarian ethics lies the recognition that our historical, cultural, and material origin embeds and refracts dynamic and antagonistic visions and conceptions of the world and of what a good life can mean. It is the vitality of contradictions that gives substance to social human life, always changing, always challenged, and that makes meaning a polyphonic event, always arising and evolving “in the context of struggle” (Juzwik, 2004, p. 540).

Acknowledgments

This article is a result of a research program funded by the Social Sciences and Humanities Research Council of Canada and Laurentian University Research Fund. This article was presented at the TSG 57 (Diversity of theories in mathematics education) of ICME 14.

References

- Alcoff, L. (1988). Cultural feminism versus post-structuralism. *Signs*, 13(3), 405–436.
- Atkins, K. (2005). *Self and subjectivity*. Oxford: Blackwell.
- Bauman, Z. (1993). *Postmodern ethics*. Oxford: Blackwell.
- Bijlsma, R. (2014). Sympathy and *affectuum imitatio*: Spinoza and Hume as social and political psychologists. *South African Journal of Philosophy*, 33(1), 1–18.
- Boylan, M. (2016). Ethical dimensions of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 92(3), 395–409.
- Butler, J. (1999). *Gender trouble: Feminism and the subversion of identity*. New York, NY: Routledge.
- Clot, Y. (2015). Vygotski avec Spinoza, au-delà de Freud. *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger*, 140(2), 205–224.
- del Rio, P., & Alvarez, A. (1995). Directivity: The cultural and educational construction of morality and agency: Some questions arising from the legacy of

- Vygotsky. *Anthropology & Education Quarterly*, 26(4), 384–409.
- Fischbach, F. (2014). *La production des hommes: Marx avec Spinoza*. Paris: Vrin.
- Fischbach, F. (2015). *Philosophies de Marx*. Paris: Vrin.
- Freire, P. (1998). *Pedagogy of freedom*. Lanham, MD: Rowman & Littlefield.
- Giroux, H. (2005). *Border crossings: Cultural workers and the politics of education*. New York & London: Routledge.
- Hegel, G. (1978). *Hegel's philosophy of subjective spirit: Vol. 3* (M. J. Petry, Ed.). Dordrecht: D. Reider.
- Hobbes, T. (1841). *The English works of Thomas Hobbes of Malmesbury: Vol. 2* (W. Molesworth, Ed.). London: John Bohn.
- Hooks, B. (2015). *Talking back: Thinking feminist, thinking black*. New York, NY: Routledge.
- Juzwik, M. (2004). Towards an ethics of answerability: Reconsidering dialogism in sociocultural literacy research. *College Composition and Communication*, 55(3), 536–567.
- Kant, I. (2006). *Groundwork of the metaphysics of morals* (Mary Gregor, Trans.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Lévinas, E. (1982). *Éthique et infini*. Paris: Fayard.
- Macherey, P. (2008). *Marx 1845: Les "thèses" sur Feuerbach: Traduction et commentaire*. Paris: Éditions Amsterdam.
- Marx, K. (1998). *The German ideology, including Theses on Feuerbach and introduction to The critique of political economy*. Amherst, NY: Prometheus Books.
- Min, A. (1998). Toward a dialectic of totality and infinity: Reflections on Emmanuel Lévinas. *The Journal of Religion*, 78(4), 571–592.
- Nealon, J. (1998). *Alterity politics: Ethics and performative subjectivity*. Durham, NC: Duke University Press.
- Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1), 101–118.
- Radford, L. (2019a). Une théorie vygotkienne de l'enseignement-apprentissage: La théorie de l'objectivation. In J. Pilet & C. Vendeira (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM 2018* (pp. 314–332). Paris: IREM de Paris – Université Paris Diderot.
- Radford, L. (2019b). So, you say that doing math is like playing music? The mathematics classroom as a concert hall. *La matematica e la sua didattica*, 27(1), 69–87.
- Radford, L. (2020). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, RECME, Número especial de la Teoría de la Objetivación*, 5(2), 15–31.
- Radford, L. (2021a). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Leiden & Boston: Brill Sense.
- Radford, L. (2021b). Reimaginar el aula de matemáticas: Las matemáticas escolares como praxis emancipadora. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(2), 44–55.
- Radford, L., Demers, S., & Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en*

- mathématiques*. Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. <http://luisradford.ca>
- Radford, L., & Lasprilla Herrera, A. (2020). De porqué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *La matematica e la sua didattica*, 28(1), 107–128.
- Roth, W.-M. (2013). Toward a post-constructivist ethics in/of teaching and learning. *Pedagogies*, 8(2), 103–125.
- Roth, W.-M. (2017). *The mathematics of mathematics*. Rotterdam: Sense Publisher.
- Russon, J. (2004). *Reading Hegel's Phenomenology*. Bloomington, IN: Indiana University Press.
- Scott, C. E. (1990). *The question of ethics: Nietzsche, Foucault, Heidegger*. Bloomington: Indiana University Press.
- Spinoza, B. (1989). *Ethics including the improvement of the understanding* (R. Elwes, Trans.). Buffalo, NY: Prometheus Books.
- Vygotsky, L. S. (1997). *Educational psychology*. Boca Raton, FL: St. Lucie Press.
- Vygotski [Vygotsky], L. S. (2003). *Conscience, inconscient, émotions*. Paris: La dispute.

La formación de maestros/as y profesores/as de matemática: Conocimiento, procesos de razonamiento y práctica

Mathematics teacher education: Knowledge, reasoning processes and practice

La formazione di maestri e professori di matematica: Conoscenza, processi di ragionamento e pratica¹

Salvador Llinares

Universidad de Alicante, España

Recordando la conferencia de Bruno D'Amore:

De la teoría didáctica a la profesión docente

(Bogotá, 20 febrero 2019)

Resumen. *Uno de los objetivos de los programas de formación de profesores de matemática es ayudar a los estudiantes a razonar con conocimiento cada vez más especializado de Didáctica de la Matemática para poder desarrollar buenas prácticas en la enseñanza de la matemática. En este trabajo describimos iniciativas dirigidas a potenciar el desarrollo de competencias docentes que ponen el foco de atención en las características del pensamiento matemático de los/las estudiantes (los alumnos aprendiendo matemática). Dos ideas organizan la descripción. En primer lugar, la gestión de la dicotomía conocer-hacer para apoyar el desarrollo de competencias docentes desde la universidad y, en segundo lugar, sobre lo que significa empezar a aprender una profesión en la universidad considerando los entornos de aprendizaje que pueden ayudar a este desarrollo.*

Palabras claves: formación de profesores de matemática, desarrollo de competencias docentes, mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de la matemática.

Abstract. *One of the objectives of the mathematics teacher education programs is to help students to reason with increasingly specialized knowledge of Mathematics Education in order to develop good practices in the teaching of mathematics. In this paper we describe initiatives aimed at promoting the development of mathematics teaching competencies that focus attention on the characteristics of children's mathematical thinking. Two ideas organize the description. First, considering the*

¹ Artículo invitado/Invited article/Articolo invitato.

knowing-doing dichotomy to support the development of teaching competencies from the university, and next, on what it means to learn a profession at the university considering the learning environments that can help this development.

Keywords: mathematics teacher education, development of teaching competence, professional noticing of mathematics teaching.

Sunto. *Uno degli obiettivi dei programmi di formazione degli insegnanti di matematica è quello di aiutare gli studenti a ragionare con conoscenze sempre più specializzate in Didattica della Matematica al fine di poter sviluppare buone pratiche nell'insegnamento della matematica. In questo articolo descriviamo iniziative volte a potenziare lo sviluppo di competenze didattiche che pongono l'accento sulle caratteristiche del pensiero matematico degli studenti (alunni che imparano la matematica). Due idee organizzano la descrizione. In primo luogo, la gestione della dicotomia conoscere-fare per supportare lo sviluppo di competenze didattiche a partire dall'università e, in secondo luogo, su che cosa significa iniziare ad apprendere una professione all'università, considerando gli ambienti di apprendimento che possono aiutare questo sviluppo.*

Parole chiave: formazione degli insegnanti di matematica, sviluppo delle competenze docenti, guardare professionalmente alle situazioni di insegnamento della matematica.

1. La formación de maestros/as y profesores/as de matemática

La formación de maestros/as y profesores/as de matemática es un tema particularmente oportuno por la necesaria redefinición de la noción de *competencia docente*. Esta es consecuencia de la situación cambiante de la sociedad (de las nuevas demandas sociales) que exige competencias adicionales a las que tradicionalmente se vinculaban a la tarea de enseñar matemática. Este hecho conlleva repensar la manera en cómo la universidad entiende la formación de profesores. En este artículo describimos algunas iniciativas dirigidas a potenciar el desarrollo de competencias docentes que son consideradas clave en la enseñanza de la matemática, basadas en investigaciones de Didáctica de la Matemática, que ponen el foco de atención en las características del pensamiento matemático de los/las estudiantes (los alumnos aprendiendo matemática).

Además, existe una razón de índole personal vinculada a un trabajo que empezamos a desarrollar en la Universidad de Alicante hace algunos años por un grupo de formadores de profesores en el ámbito de la Didáctica de la Matemática (Llinares, 2012). Nos preguntábamos cómo podríamos ayudar a nuestros estudiantes (estudiantes para maestro/as en la Facultad de Educación y, en aquel momento, estudiantes de la Licenciatura de Matemática cursando la asignatura de Didáctica de la Matemática) a usar el *conocimiento* de Matemática y de Didáctica de la Matemática para dotar de sentido a las situaciones de enseñanza de la matemática en los niveles no universitarios,

como paso previo a poder generar buenas prácticas como profesores de matemática para que el alumno aprenda matemática.

Las cuestiones planteadas eran, por una parte, cómo se podía aprender *sobre la práctica* (en este caso, enseñar matemática) en la universidad y, en segundo lugar, cómo la *dicotomía entre conocer y hacer* podía potenciarse en la universidad. Para dar respuesta a estas cuestiones se consideró la evolución de la Didáctica de la Matemática como una disciplina científica y se reflexionó sobre: (i) qué características debían tener los entornos de aprendizaje que podíamos construir en la universidad y (ii) qué y cómo aprendían nuestros estudiantes en estos entornos de aprendizaje.

La manera de aproximarnos a estas cuestiones asume que aprender un conocimiento no se puede separar de su uso (dónde es pertinente usarlo, qué tipo de cuestiones ayuda a responder, etc.). En particular, se asume que usar el conocimiento en situaciones prácticas transforma dicho conocimiento. La hipótesis que subyace en esta aproximación es que las actividades propuestas y el contexto en el que se proponen dan forma al conocimiento que debe ser usado. Eraut (1994) indicaba que los procesos de interpretar una situación evidencian un modo de usar el conocimiento. Por ejemplo, usar el conocimiento sobre el aprendizaje de la matemática para interpretar las respuestas de los alumnos conlleva tener que adaptar el conocimiento que posee el docente sobre la Matemática y la Didáctica de la Matemática a las particularidades de estas respuestas (cómo se han generado, el nivel educativo, las características del currículo, etc.).

Dotar de sentido a las situaciones de la práctica, en nuestro caso la enseñanza de la matemática, como un paso necesario para decidir qué hacer y poder desarrollar buenas prácticas docentes, implica *identificar* los elementos relevantes de la situación para el objetivo pretendido (el aprendizaje de la matemática por parte de los estudiantes), e *interpretarlos desde el conocimiento procedente de los dominios científicos que dan soporte a la práctica* (la Matemática y la Didáctica de la Matemática), para poder justificar las decisiones de acción (D'Amore, 2005; D'Amore et al., 2008). En aquellos momentos, empezamos a situar el foco de atención en la caracterización de los *argumentos prácticos de nuestros estudiantes* cuando relacionaban los *hechos* con *las razones dadas* justificando lo sucedido desde el referencial teórico para apoyar una nueva acción (Fenstermacher & Richardson, 1993). Esta aproximación intentaba dar cuenta de la competencia docente vinculándola a la idea de “análisis deliberativo” de lo observado (Brown & Coles, 2011, 2012).

Nuestro primer acercamiento se realizó hace unos años, con algunos de los instrumentos tecnológicos creados por el servicio de Informática de la Universidad de Alicante (Figura 1). En la experiencia que realizamos en aquel momento explorábamos cómo los estudiantes para maestro/a y estudiantes de Matemática cursando la asignatura de Didáctica de la Matemática dotaban de

sentido a las situaciones de enseñanza cuando participaban en discusiones en línea dentro de entornos de aprendizaje que integraban videoclips de lecciones de matemática e información procedente de la Didáctica de la Matemática como una disciplina científica que apoyaba la práctica observada. Aprender a dotar de sentido a las situaciones de enseñanza de la matemática para poder tomar las mejores decisiones en la práctica docente emergió como un objetivo para aprender una profesión: el ser maestro o profesor de matemática de educación secundaria. El desarrollo de esta competencia docente en la universidad se ha convertido en uno de los objetivos de los programas de formación de profesiones que implican *razonar con conocimiento cada vez más especializado para desarrollar buenas prácticas*. Algunos de los resultados de la investigación (Llinares & Valls, 2009, 2010) mostraron nuevos modos de articular la práctica en el aula y la formación de profesores en la universidad. Esta competencia es ahora conocida como *mirar profesionalmente* las situaciones de enseñanza de la matemática (*Professional noticing*) (Mason, 2002; Dindyal et al. 2021; Jacobs et al., 2010; Scheiner, 2021).

Figura 1

Estructura del entorno de aprendizaje online usando la herramienta “Sesiones” del CV de la Universidad de Alicante (Llinares & Valls, 2010, p. 180)

The image shows a screenshot of a web-based learning environment. On the left side, there is a video player showing a classroom scene. Below the video, there are several text-based elements, including a list of documents and a chat area. On the right side, there is a document viewer displaying text related to mathematical competencies. Several callout boxes with arrows point to specific parts of the interface:

- Video-clip**: Points to the video player.
- Papers with theoretical information**: Points to the list of documents on the left.
- On-line discussions**: Points to the chat area on the left.
- On-line workshop**: Points to the chat area on the left.
- Objectives**: Points to the 'OBJETIVOS SEGUN UNO' section in the document viewer.
- Methodological issues**: Points to the 'MÉTODOS DE ENSEÑANZA' section in the document viewer.
- Tasks and discussion questions**: Points to the 'TAREAS Y PREGUNTAS DE DISCUSIÓN' section in the document viewer.

Dos ideas organizaron nuestra manera de proceder. En primer lugar, la gestión

de la dicotomía conocer-hacer para apoyar el desarrollo de competencias docentes desde la universidad; y en segundo lugar, sobre lo que significa empezar a aprender una profesión en la universidad considerando un foco particular sobre los entornos de aprendizaje que pueden ayudar a ser competente en la profesión.

2. Dicotomía *conocer-hacer* para apoyar el desarrollo de competencias docentes desde la universidad

La competencia *mirar profesionalmente* distingue a un/a experto/a en una determinada área de alguien que no lo es por su capacidad de identificar y dotar de significado aspectos importantes de las situaciones con relación con su profesión. En particular, mirar profesionalmente la enseñanza de la matemática consiste en ser capaz de identificar aspectos relevantes para *el aprendizaje matemático* del alumno en una situación de enseñanza que, otras personas no profesionales, no serían capaces de identificar. Esta mirada profesional permite a los docentes actuar de manera coherente con la situación de enseñanza. John Mason (2002, 2020) caracterizó la “disciplina de la mirada profesional” (*discipline of noticing*) subrayando la capacidad del docente de analizar su propia práctica para generar formas de actuar de manera consciente que apoyaran el aprendizaje matemático de los estudiantes. Además, subraya la idea de que lo que llega a ser percibido a través de la mirada profesional debe ser validado por la experiencia de otros, permitiendo mirar cosas de las que previamente no se era consciente, y poder disponer de acciones para actuar como consecuencia de lo que ha sido observado. De esta manera, aprender a observar aspectos que pueden llegar a ser relevantes en la enseñanza de la matemática, que previamente no se era capaz de observar, junto con las acciones disponibles para actuar, genera la relación entre el conocimiento y la práctica (*entre conocer y hacer*). En esta conceptualización de la competencia docente *mirar profesionalmente* lo que importa es conocer cómo actuar en cada momento en función del significado dado a la situación desde el conocimiento teórico de las disciplinas que apoyan la práctica profesional (la Didáctica de la Matemática y la Matemática).

Sin embargo, como no es posible asegurar la existencia de “la mejor acción” en cualquier situación se subraya la necesidad *de ser capaz de justificar la acción* elegida mediante un discurso que se apoye en el conocimiento procedente de los dominios científicos que dan soporte a la práctica profesional (D’Amore et al., 2008). Esta perspectiva pone de relieve que las acciones del docente en el aula no pueden ser consideradas únicamente expresiones de los recursos disponibles, sino que sus acciones atestiguan la adaptación del conocimiento que se posee a las condiciones y características de los contextos en los que trabaja. Por tanto, la formación de docentes tiene como objetivo potenciar el desarrollo de esta competencia para poder llegar a

ser conscientes de lo relevante en una situación de enseñanza y estar en condiciones de actuar en dicho contexto.

En estos momentos, mirar profesionalmente la enseñanza de la matemática es una competencia docente relevante para la práctica de los docentes que ha generado una importante línea de investigación en Educación en general y en Educación Matemática en particular (Mason 2002; Schack, Fisher, & Wilhelm, 2017; Sherin, Jacobs, & Philipp, 2011). Otros dominios en los que se está aplicando esta perspectiva son aquellos en los que se prepara a los estudiantes universitarios para una profesión (como las Ciencias de la Salud). En estas iniciativas, el foco de atención está en articular espacios y actividades en la universidad para que los estudiantes puedan aprender a identificar lo relevante de las situaciones prácticas, interpretarlas desde el conocimiento teórico de los dominios científicos que dan soporte a la práctica profesional, y decidir sobre las líneas de actuación.

La relevancia de esta perspectiva para la formación de diferentes perfiles profesionales desde la universidad toma cuerpo a través del *Core Practice Consortium*. Este es un proyecto colaborativo entre diferentes instituciones y disciplinas dirigido a identificar *prácticas profesionales nucleares* que puedan ser discutidas y ser accesibles a los/as estudiantes universitarios/as, así como explorar pedagogías (formas de actuar en la universidad y entornos de aprendizaje) que ayuden a los estudiantes a familiarizarse con maneras de pensar para analizar dichas prácticas (Grossman et al., 2009; McDonald et al., 2013). En el caso particular de educación, la aproximación a la formación de maestros y profesores apoyados en la práctica (*practice-based teacher education*) implica identificar “prácticas profesionales nucleares” (*core practices of teaching*) y apoyar a los estudiantes universitarios para aprenderlas. Ejemplos de estas prácticas profesionales nucleares, en el caso de la enseñanza de la matemática, son la gestión de la discusión matemática en gran grupo en el aula, el análisis e interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes, la representación y gestión de normas socio-matemáticas en el aula (por ejemplo, qué es lo que se puede considerar una explicación matemática aceptable), y la ingeniería didáctica. Recientemente Jacobs y Spangler en su aportación en el *Compendium for Research in Mathematics Education* (Cai, 2017) presentan a la competencia docente *mirar profesionalmente* (*professional noticing*) como una de estas prácticas profesionales nucleares en su revisión de “Research on Core Practices in K-12 Mathematics Teaching” (Jacobs & Spangler, 2017).

La competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de la matemática, como una de estas prácticas nucleares, subraya la capacidad del profesional (es nuestro caso, para la enseñanza de la matemática) de analizar diferentes aspectos de la enseñanza de la matemática para generar formas de actuar de manera consciente (por ejemplo, ante las respuestas de los estudiantes durante la resolución de problemas o considerando la ingeniería

didáctica teniendo en cuenta las características de las tareas matemáticas para apoyar el aprendizaje matemático). Esta conceptualización subraya una serie de procesos tales como percibir/atender aspectos relevantes, interpretarlos y razonar con estas interpretaciones para decidir qué hacer.

La noción de *prácticas profesionales nucleares* subraya su naturaleza relacional y por tanto resulta coherente pensar en competencias docentes vinculadas a conjuntos de estas prácticas profesionales nucleares. En particular, *la interpretación* se apoya en la capacidad de vincular las evidencias de la práctica con ideas y principios teóricos más generales apoyando los razonamientos sobre la enseñanza para decidir cómo actuar (van Es & Sherin, 2002). Esta perspectiva abre un espacio de indagación sobre la interacción entre la percepción – lo que se es capaz de observar mediado por el conocimiento, creencias y actitudes –, la interpretación – el proceso de considerar las evidencias como ejemplos particulares de ideas teóricas generales –, y la toma de decisiones en la planificación y en la práctica.

3. Aprender una práctica profesional en la universidad: entornos de aprendizaje

La importancia dada a la competencia docente “mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza” ha definido recientemente cuestiones sobre cómo apoyar su desarrollo en los programas de formación docente, originando una línea de investigación en Educación Matemática (Dindyal et al., 2021; Fernández & Choy, 2019; Mason, 2020; Schack et al., 2017; Sherin et al., 2011; Fernández et al., 2018; Llinares et al., 2019). La relevancia de esta línea de investigación está vinculada al establecimiento de nuevo conocimiento sobre el aprendizaje de los estudiantes para maestro/a y profesores/as de matemática de educación secundaria suponiendo un avance en nuestra comprensión del aprendizaje docente (Scheiner, 2016).

En nuestro grupo de trabajo en la Universidad de Alicante (España) uno de los medios que actualmente usamos en los programas de formación es la idea de *entornos de aprendizaje*. Los principios en los que se basan estos entornos de aprendizaje son el uso de: representaciones de la práctica (registros); instrumentos conceptuales; preguntas guía para apoyar la articulación de la mirada profesional de los/las estudiantes, y espacios para potenciar los procesos de razonamiento que permitan ampliar la comprensión sobre la práctica docente (Llinares & Fernández, 2021) (Figura 2).

Figura 2

Actividades que se articulan en los entornos de aprendizaje



El primer principio sobre el que se basa el diseño de los entornos de aprendizaje que apoyan el aprender una práctica profesional en la universidad es el uso de *representaciones de la práctica (registros)*. Con relación a la práctica de enseñar matemática, una representación de la práctica puede ser un conjunto de respuestas de alumnos a un problema de matemática, videoclips de lecciones de matemática o de discusiones en grupo en la resolución de un problema, la planificación de una lección, algunos materiales curriculares como colecciones de libros de texto o descripción de sucesos de aula en forma de casos. Estas representaciones de la práctica sirven como *instrumentos de mediación* entre la práctica profesional y el conocimiento científico que apoya dicha práctica. Las representaciones de la práctica pueden mostrar un aspecto o varios de una situación de clase y proporcionan a los estudiantes universitarios contextos reales para analizar e interpretar aspectos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La hipótesis que subyace a este planteamiento (en el que los registros de la práctica son instrumentos de mediación entre la práctica profesional y el conocimiento científico que la apoya) es que *la construcción de conocimiento no puede separarse de su uso* (como decía el profesor Eraut) lo que implica tener en cuenta las características de las actividades para aprender a usarlo. De este modo, se define un continuo entre lo que podrían ser las aulas de la

universidad, los contextos en los que se realizan las prácticas de enseñanza, y los encuentros entre tutores y estudiantes para profesor cuando analizan situaciones de aula. El objetivo aquí es doble. En primer lugar, presentar *registros de la práctica* como oportunidades para aprender conocimiento y aprender a usarlo en la tarea de dotar de significado a las situaciones de enseñanza de la matemática (es decir, la situación práctica). En segundo lugar, ayudar a los estudiantes universitarios a ir más allá del número limitado de casos que es posible presentar en estos contextos para *construir formas de pensar y hablar sobre los aspectos de la enseñanza de la matemática* que ayuden a justificar sus acciones para potenciar el aprendizaje matemático de los estudiantes. El uso de estas representaciones de la práctica en el programa de formación determina lo que los estudiantes para profesor pueden llegar a aprender, como paso previo a la realización de las prácticas de enseñanza. En esta perspectiva, la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza es considerada una de estas prácticas profesionales nucleares que se apoya en el conocimiento científico sobre las *progresiones del pensamiento matemático de los estudiantes*, y los rasgos de las actividades matemáticas.

En segundo lugar, el uso de *instrumentos conceptuales*, es decir, información teórica procedente de las investigaciones en Didáctica de la Matemática y de la Matemática que puede ser usada para interpretar los registros de la práctica. Es decir, el conocimiento procedente de los dominios científicos que dan soporte a *la práctica profesional que se quiere aprender*. En este contexto, caracterizar cómo los estudiantes para profesor/a aprenden a usar el conocimiento de Matemática y de Didáctica de la Matemática cuando están intentando reconocer los elementos claves de una situación de enseñanza de la matemática para interpretarlos, y decidir cómo actuar, implica dar cuenta de sus procesos de razonamiento. Un antecedente en el estudio de cómo los estudiantes universitarios aprenden a razonar sobre una situación de enseñanza es el constructo *argumento práctico* (Fenstermacher & Richardson, 1993). El término *argumento* se refiere al contenido y a la estructura de la explicación generada por un/a estudiante sobre una situación de enseñanza en la que las evidencias se conectan de alguna manera con principios más generales. La manera en la que el conocimiento teórico es integrado con las evidencias en el proceso de dar razones por parte de los estudiantes para profesor al construir un argumento práctico refleja el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente”.

Finalmente, para ayudar a identificar los aspectos sobre los que centrarse en la interpretación de los registros de la práctica se incorporan *preguntas guía* como una manera de apoyar la articulación de la mirada profesional. Dichas preguntas centran la atención del estudiante en los aspectos objeto de aprendizaje en el programa de formación, como pueden ser el diseño de tareas (y la ingeniería didáctica), la interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes o el análisis de la gestión del discurso matemático en el aula (es

decir, actividades relacionadas con la práctica profesional).

Por otra parte, el desarrollo de la competencia docente se asume como una transición desde un discurso básicamente descriptivo (y a veces como juicios de valor), hacia un discurso que puede estar organizado alrededor de las ideas teóricas con vínculos claros a las evidencias procedentes del registro de la práctica. En este caso, la calidad del discurso generado, los *argumentos prácticos* de los estudiantes, viene dada por la forma en la que las evidencias, desde el registro de la práctica, se vinculan a los elementos teóricos usados para dotarlas de sentido y, en la medida en la que *los estudiantes universitarios pueden considerar lo que observan como casos particulares de ideas teóricas*, para apoyar sus decisiones de acción. Por ejemplo, en qué medida los estudiantes para profesor desarrollan un discurso que les permita ir más allá de considerar las respuestas de estudiantes a problemas de matemática como correctas o incorrectas (es lo que podríamos denominar, mirar más allá de la superficie), o en qué medida justifican su propuesta de acciones de enseñanza más allá de indicar: “Es así porque es lo que viene a continuación en el currículo”, o “porque es necesario para poder aprender lo que viene a continuación”. El desarrollo de la competencia docente en los programas de formación inicial, visto a través de trayectorias entre los extremos indicados anteriormente, ha mostrado ser difícil para los estudiantes universitarios y ha dado lugar a la identificación de fases intermedias permitiendo caracterizar niveles de desarrollo de esta competencia. Las diferentes perspectivas, a través de las cuales generamos indicadores del desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de la matemática, tienen en común cómo los estudiantes llegan a generar una posición interpretativa ante los registros de la práctica (Llinares, 2019; Sánchez-Matamoros et al., 2018, 2019).

4. La competencia docente “mirar profesionalmente” como un proceso basado en el uso del conocimiento

Para desarrollar la competencia mirar profesionalmente la enseñanza de la matemática es necesario tener en cuenta representaciones de esta práctica y ayudar a los estudiantes a centrar su atención sobre ellas. Desde esta perspectiva, la descomposición de la práctica en *prácticas profesionales nucleares* apoya a los estudiantes a “ver” aspectos relevantes y a usar un *discurso específico* para pensar sobre partes de la práctica. El conocimiento que los estudiantes para profesor deben usar para identificar y comprender los aspectos de la práctica de enseñar matemática permite apoyar la idea de que la competencia docente es un proceso de razonamiento basado en el conocimiento procedente de la Didáctica de la Matemática y de la Matemática como dominios científicos que dan soporte a la práctica de enseñar matemática.

Por otra parte, los diferentes registros de la práctica permiten mostrar ciertos aspectos de la enseñanza de la matemática, pero no otros. En este sentido, somos conscientes de que existen limitaciones y diferencias en cómo las representaciones de la práctica son ejemplificadas en los programas de formación usando unos registros en vez de otros (por ejemplo, usando videos o narrativas para mostrar características de la interacción entre el profesor y los estudiantes). Esto es debido a que es posible movilizar diferentes conocimientos al analizar los registros de la práctica (Thomas, Jong, Fisher, & Schack, 2017). Es decir, el desarrollo de las destrezas alrededor de las que se articula esta competencia docente (identificar los elementos relevantes, interpretarlos y tomar decisiones de cómo seguir la enseñanza) se apoya en diferentes dominios de conocimiento, en la existencia de un vocabulario específico y una forma de organizar el discurso profesional (Callejo et al., 2021; Ivars et al., 2018, 2020; Moreno et al., 2021).

La existencia de un vocabulario específico permite nombrar aspectos de la práctica ayudando a focalizar la atención, y a empezar a generar argumentos de la práctica cada vez mejor estructurados. Así, el conocimiento que el programa de formación proporciona y que debe ser movilizado para analizar un registro de la práctica debe llegar a ser considerado relevante por los estudiantes para profesor. Es decir, el conocimiento que se articula en la competencia docente mirar profesionalmente tiene una vinculación estrecha con el registro de la práctica proporcionado. En este caso, los argumentos prácticos, generados por los estudiantes para profesor al analizar los diferentes registros de la práctica, considerados como evidencias del desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente, pueden estar determinados por la concreción de la información teórica proporcionada como guía.

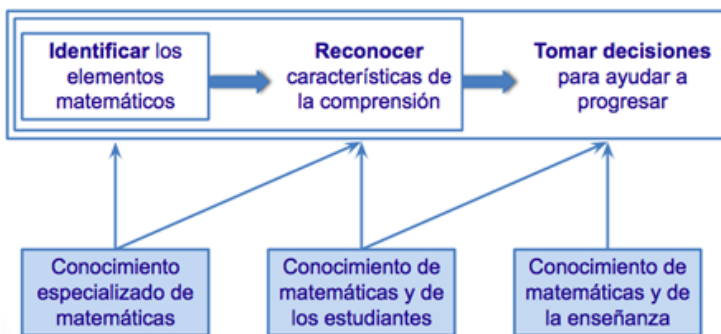
Desde este punto de vista, una cuestión clave para comprender en su justa medida el papel de los registros de la práctica lo determina lo que el *binomio conocimiento teórico-registro de la práctica* permite hacer visible. Es decir, en qué medida dicho binomio permite generar oportunidades para aprender, determinando qué mirar y cómo interpretar lo que se mira. El análisis de registros de la práctica guiados por algún tipo de información teórica procedente de los dominios científicos que dan soporte a la práctica subraya la idea de que la competencia docente mirar profesionalmente es un proceso a través del cual se aprende a usar el conocimiento pertinente para enseñar matemática. Este aprendizaje se evidencia por la generación de un discurso profesional rico en detalles (contenido del discurso) (Ivars et al., 2018; Moreno et al., 2021) y a través de la mejora de una estructura argumental que hace cada vez más explícita la manera en la que se articula la relación entre las evidencias, las inferencias realizadas, y los apoyos teóricos usados para justificar dichas inferencias.

Por ejemplo, para aprender a identificar los elementos matemáticos implícitos en una situación de enseñanza, los/las futuros/as docentes deben

movilizar su conocimiento de matemática y sobre el currículo. Para reconocer evidencias de la comprensión en las respuestas dadas por estudiantes en una situación de aula, es necesario que el/la futuro/a docente identifique los elementos matemáticos implicados y, además, use el conocimiento que tiene del contenido matemático y sobre la progresión en el aprendizaje para poder proporcionar explicaciones matemáticas de los procedimientos usados. Por último, para tomar decisiones que ayuden a progresar en el aprendizaje, los/las futuros/as docentes tienen que usar su conocimiento de matemática y sobre el aprendizaje de los/las estudiantes, para anticipar lo que al alumnado les parecerá más fácil o difícil, los errores que cometen con más frecuencia, y qué ejemplos proponer (Buforn, 2017; Buforn et al., 2020) (Figura 3).

Figura 3

Relación entre el conocimiento de matemática para enseñar y la competencia mirar profesionalmente (Buforn, 2017)



En este sentido, la relación entre el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente y el aprendizaje del conocimiento de matemática necesario para enseñar se retroalimenta. Este hecho plantea cuestiones sobre las condiciones de acceso de los/las estudiantes para maestro/a y profesor/a al programa de formación. A pesar de los adelantos tecnológicos y conceptuales de los últimos años con relación al aprendizaje de los/las estudiantes en los programas de formación de maestros/as y profesores/as en la universidad (Brow et al., 2020), sin embargo, no ha sido resuelta la relación entre las condiciones de acceso a la universidad y el rendimiento académico en los programas de formación. En particular, la capacidad de aprovechar el conocimiento que debe ser aprendido en la universidad para el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de la matemática está vinculada al conocimiento matemático que los estudiantes tienen al entrar en el programa de formación y, por tanto, puede estar determinada por las condiciones de acceso institucional al programa de formación.

En el caso de la formación de maestros, los resultados del estudio comparativo entre las Universidades de Alicante, Autónoma de Barcelona y Helsinki indicaba que los criterios de acceso a los programas de formación, y la trayectoria de formación previa pueden influir en la capacidad de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje que la universidad proporciona. Los resultados de la comparación entre los criterios de acceso a los programas de formación de maestros y de las trayectorias académicas previas de los/las estudiantes que acceden al programa de formación realizado en las tres universidades y, el papel que determina la variable número de estudiantes que acceden al programa, parecen apoyar la hipótesis de la necesaria exigencia de ciertas condiciones de acceso que podrían asegurar un mejor aprovechamiento de las propuestas realizadas desde la universidad. Estos criterios de acceso pueden influir en el aprovechamiento de las oportunidades dadas por la universidad ya que tienen impacto sobre el conocimiento de matemática con los que los estudiantes llegan al programa (Gorgorió et al., 2021).

5. Comentarios finales

La enseñanza de la matemática es una práctica compleja que se apoya en la Didáctica de la Matemática y la Matemática como dominios científicos. Las reflexiones sobre cómo apoyar el desarrollo de la competencia docente vinculada a esta práctica se han organizado alrededor de dos ideas: la Dicotomía *conocer-hacer*, y la caracterización de los procesos de razonamiento evidenciados mediante la competencia “mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza. Por otra parte, la descripción de este ámbito de la práctica de los formadores de profesores de matemática ha generado una línea de investigación en Educación matemática que nos está proporcionando información para comprender mejor el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesores de matemática en la universidad.

Reconocimientos

1. Las ideas expresadas en este trabajo forman parte del proyecto PID2020-116514GB-I00, “*De la universidad a la práctica docente: Caracterización del desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente la enseñanza de la matemática*”. Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.
2. Agradezco a mis compañeras Ceneida Fernández, María del Mar Moreno y Julia Valls sus comentarios realizados a versiones preliminares de este texto.
3. Este texto forma parte de la lección dictada por Salvador Llinares el 16 de septiembre de 2021 durante el acto de inauguración oficial del curso 2021–22 en la Universidad de Alicante, España.

Referencias bibliográficas

- Brown, L., & Coles, A. (2012). Developing “deliberate analysis” for learning mathematics and for mathematics teacher education: How the enactive approach to cognition frames reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1–2), 217–231.
- Brown, L., Fernández, C., Helliwell, T., & Llinares, S. (2020). Prospective mathematics teachers as learners in university and school contexts: From university-based activities to classroom practice. In G. M. Lloyd & O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teachers Education: Volume 3: Participants in Mathematics Teacher Education* (pp. 343–366). Leiden: Brill.
- Buform, A. (2017). *Características de la competencia docente mirar profesionalmente de los estudiantes para maestro en relación al razonamiento proporcional* [Tesis doctoral]. EDUA, Escuela de Doctorado de la Universidad de Alicante, España.
- Buform, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A., & Brown, L. (2020). Pre-service teachers’ knowledge of unitizing process in recognizing students’ reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333>
- Cai J. (Ed.). (2017). *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: NCTM.
- Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P., Moreno, M., & Sánchez-Matamoros, G. (2021). The use of a length and measurement HLT by pre-service kindergarten teachers' to notice children's mathematical thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1–21. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10163-4>
- D’Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell’attività matematica della classe intesa come società: Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, 19(3), 325–336.
- D’Amore, B., Godino, J., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H., & Gamora Sherin, M. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM Mathematics Education*, 53(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y>
- Eraut, M. (1994). *Developing professional knowledge and competence*. London: The Falmer Press.
- Fenstermacher, G. D., & Richardson, V. (1993). The elicitation and reconstruction of practical arguments in teaching. *Journal of Curriculum Studies*, 25(2), 101–114.
- Fernández, C., & Choy, B. H. (2019). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing: Learning, teaching, psychological, and social perspectives. In S. Llinares & O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 337–360). Leiden: Brill.
- Fernández, C., Llinares, S., & Rojas, Y. (2020). Prospective mathematics teachers’ development of noticing in an online teacher education program. *ZDM Mathematics Education*, 52(5), 959–972. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01149-7>
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M. L. (2018). Noticing students’ mathematical thinking: Characterization, development and contexts.

AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 13, 39–61.

- Gorgorió, N., Albarracín, L., Laine, A., & Llinares, S. (2021). Primary education degree programs in Alicante, Barcelona and Helsinki: Could the differences in the mathematical knowledge of incoming students be explained by the access criteria? *LUMAT General Issue*, 9(1), 174–207.
- Grossman, P., Compton, C., Ingra, D., Ronfeld, M., Shahan, E., & Williamson, P. W. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record*, 111(9), 2055–2100.
- Ivars, P. Fernández, C., & Llinares, S. (2020). A learning trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(3), 529–548.
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., & Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11), 1–16. <https://doi.org/10.29333/ejmste/93421>
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202.
- Jacobs, V. R., & Spangler, D. A. (2017). Research on core practices in K-12 mathematics teaching. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 766–792). Reston, VA: NCTM.
- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 53–70.
- Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education*, 1(3), 76–93.
- Llinares, S. (2019). Indicators for the development of noticing: How do we recognize them? *For the Learning of Mathematics*, 40(0), 38–43.
- Llinares, S., & Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: Características de una agenda de investigación en didáctica de la matemática. *La Gaceta de la RSME*, 24(1), 185–205.
- Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A., & Groenwald, C. (2019). “Mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 177–192). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.
- Llinares, S., & Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: Interaction and online video case studies. *Instructional Science*, 37(3), 247–271.
- Llinares, S., & Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(2), 177–196.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge/Falmer.
- Mason, J. (2020). Learning about noticing, by, and through, noticing. *ZDM Mathematics Education*, 53(1), 231–243. <https://doi.org/10.1007/s11858-020->

01192-4

- McDonald, M., Kazemi, E., & Kavanagh, S. S. (2013). Core practices and pedagogies of teacher education: A call for a common language and collective activity. *Journal of Teacher Education*, 64(5), 378–386.
- Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L. Perez-Tyteca, P., & Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: The instrumentation of a learning trajectory. *ZDM Mathematics Education*, 53(1), 57–72. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01234-5>
- Rooney, D., & Boud, D. (2019). Toward a pedagogy for professional noticing: Learning through observation. *Vocations and Learning*, 12(3), 441–457. <https://doi.org/10.1007/s12186-019-09222-3>
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 100(1), 83–99. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y>
- Sánchez-Matamoros, G., Moreno Moreno, M., Pérez Tyteca, P., & Callejo de la Vega, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(2), 203–228. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2124>
- Schack, E. O., Fisher, M. H., & Wilhelm, J. A. (2017). *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks*. Cham: Springer.
- Scheiner, T. (2016). Teacher noticing: Enlightening or blinding? *ZDM Mathematics Education*, 48(1–2), 227–238. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0771-2>
- Scheiner, T. (2021). Towards a more comprehensive model of teacher noticing. *ZDM Mathematics Education*, 53(1), 85–94. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01202-5>
- Sherin, M. G, Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York, NY: Routledge.
- Thomas, J., Jong, C., Fisher, M. H., & Schack, E. O. (2017). Noticing and knowledge: Exploring theoretical connections between professional noticing and mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Educator*, 26(2), 3–25.
- Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristán, A. I. (2013). Technology-driven developments and policy implications for mathematics education. In M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 753–789). New York, NY: Springer.
- Watson, F., & Rebar, A. (2014). The art of noticing: Essential to nursing practice. *British Journal of Nursing*, 23(10), 514–517. <https://doi.org/10.12968/bjon.2014.23.10.514>
- Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571–596.

RECENSIONI

Luis Radford & Maritza Silva Acuña (Eds.). (2021). *Ética: entre educación y filosofía*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Recensione di Martha Isabel Fandiño Pinilla

Dopo vari mesi di lavorazione editoriale, che ho avuto almeno parzialmente la possibilità di seguire con molto entusiasmo, ha visto finalmente la luce il testo appena citato, pochi mesi fa.

In questo libro si propone un dialogo tra educatori matematici (quelli che noi più propriamente chiamiamo: didatti della matematica) e filosofi, dialogo nel quale si affronta il problema dell'etica, correttamente e concretamente considerata qui non solo come una disciplina che esprime e analizza criteri di giudizio relativi ai comportamenti propri e altrui ma anche, e più in generale, come l'insieme di norme e valori su cui si basano le regole del comportamento umano nelle società o nelle istituzioni di cui si è parte, per esempio l'istituzione scolastica. Poiché questo tema comprende e comporta una riflessione razionale e consequenziale, ha un senso ben preciso e concreto fare appello all'etica in un argomento come la didattica. D'altra parte, già da decenni, autori come Paul Ernest, Luis Radford e altri hanno proposto profonde e a volte sorprendenti, riflessioni.

Questo nuovo studio, curato da Luis Radford e Maritza Silva Acuña, in lingua spagnola, che vede la luce a Bogotá, così dettagliato e profondo, acquista dunque un interesse particolare, dato che propone appunto l'etica vista come punto di passaggio, di connessione, di confronto tra educazione e filosofia.

Il libro inizia con un denso prologo di Bruno D'Amore, invitato dagli editors ad aprire il discorso con una riflessione critica e analitica; in tale prologo, vengono poste basi specifiche per una lettura meticolosa e problematica del testo, offrendo per esempio analisi critiche a monte, per esempio la sottile ma necessaria distinzione fra etica e morale, termini a volte ingenuamente confusi tra loro.

Il testo consta poi di tre parti assai dense e profonde, ciascuna delle quali solleva un problema specifico e attraente, non solo culturalmente.

Nella prima parte, l'etica si presenta come un ponte di congiunzione e di acceso dibattito tra filosofia ed educazione. Assistiamo ad analisi molto precise e significative, profonde e concrete, sul ruolo del docente; appaiono studi analitici e comparativi su termini come sensibilità umana, spazio etico del corpo e funzioni estetiche. Se c'è un comune elemento interpretativo, nella pur vasta e variegata tipologia dei singoli approcci, esso risiede nella comune interpretazione, da parte degli Autori, di elementi che possiamo definire descrittivi di un' "etica pedagogica".

Nella seconda parte, tale relazione è per così dire invertita e si dà dunque luogo a un dibattito tra istruzione e filosofia; la comparazione fra le due aree conduce a situazioni che, nel precedente prologo, erano già state definite

“simmetriche”. A mio avviso è particolarmente rilevante, come si evince dai testi che costituiscono questa parte del libro, l’idea di affrontare il problema dell’etica non solo nell’insegnamento della matematica, ma nella matematica stessa (tema peraltro non nuovo, ma sempre avvincente). Più volte ricorrente nei diversi contributi appare la questione della dimensione nel tema pedagogico dell’ “incontro con l’altro”, considerato sempre in modo specifico e significativo nell’educazione matematica. Questo modo di presentare la problematica della questione è determinante per spiegare il motivo ricorrente della seconda parte del libro, arrivando a puntualizzare con precisione totale il senso dell’etica nel campo dell’educazione matematica intesa in generale.

Un esempio significativo e specifico, presente nella stragrande maggioranza dei testi degli Autori di questa seconda parte, è quello che viene ascritto ai contenuti descrittivi e fondanti della teoria dell’oggettivazione. In questa potente interpretazione teorica, l’educazione matematica è vista, com’è ben noto, come uno sforzo sociale più che individuale, una vera e propria azione che crea situazioni che servono a ideare, immaginare e condividere forme di vita collettiva; il contenuto matematico delle azioni che si realizzano nella didattica della matematica ne è allora solo *una* componente e non più, come in altre teorie didattiche, *la* componente. Si tratta di azioni non solo sul *sapere*, ma anche sull’*essere*, il che permette di concepire il processo di insegnamento-apprendimento come una dimensione che coinvolge questi due aspetti fondamentali dell’individuo: conoscere ed essere. Non bisogna dimenticare che questo processo di apprendimento non è un’idea astratta ma si ipotizza concretamente, in relazione a un essere umano. Dunque, gli aspetti culturali devono far parte di questo processo che coinvolge l’essere, ma non solo nella sua individualità, bensì anche negli aspetti relazionali, collettivi e sociali, dunque etici, appunto. Il che ci porta ad affermare, com’è ben noto all’interno della teoria dell’oggettivazione, che, imparando (azione sul sapere), l’individuo si trasforma (azione sull’essere) perché entra in contatto con fatti culturali storicamente situati nella società. Lo studente in un certo senso sta scoprendo ma anche costruendo questa sua società di appartenenza, dal punto di vista storico ed etico.

Dunque, in questa seconda parte del libro, segnalo uno sforzo comune degli Autori di dare rilevanza a questi profondi aspetti, pur nelle differenze di temi, modalità e stili.

Più volte appaiono i termini propri della teoria dell’oggettivazione: *labor* e rapporti tra soggettivazione e oggettivazione, per esempio. Molto chiaramente appare l’esigenza di evidenziare come individuo e cultura costituiscano entità reciproche e coesistenti, sempre in divenire, definiscano progetti di vita mai fermamente determinati, soggetti etici con influenze reciproche.

Nella terza parte del libro gli Autori affrontano la questione di come l’etica si riveli e si specifichi nel processo di insegnamento-apprendimento. Anche se con modalità ed esempi assai diversi, gli Autori sostengono sostanzialmente,

in vari modi personali, che l'azione dell'insegnante di matematica coinvolge etica ed estetica; che l'inclusione, anche in relazione a temi matematici, debba essere considerata un imperativo etico della collettività.

In molte professioni nelle quali si evidenziano aspetti collettivi o di influenza sociale culturale (gli esempi che sono proposti sono: gli operatori sanitari, i giornalisti, coloro che creano fonti o canali di informazione), la riflessione e la posizione etica sono fondamentali; l'analogo che a noi interessa è quel delicatissimo processo che riguarda la formazione degli insegnanti. Da molti degli articoli presenti, si evince che debba essere considerata di grande importanza la riflessione sugli aspetti etici presenti nella stessa attività matematica.

Questo libro dà al lettore, al docente di matematica, al ricercatore in didattica delle riflessioni e delle indicazioni spesso omesse, dimenticate, sottostimate o date per scontate; queste riflessioni non sono secondarie a quelle che occupano un maggiore dibattito nel campo dell'analisi della ricerca ma, al contrario, le determinano in qualche modo.

Sono più che certa che un'attenta lettura di questo libro da parte dei docenti di matematica di qualsiasi livello scolastico darà stimoli utili e concreti alla riflessione critica relativa al proprio operato quotidiano, dando luce e spazio ad aspetti mai o troppo poco considerati in precedenza. Questo bellissimo passo è, per me, quello che meglio rappresenta il rispettoso rapporto dell'Autrice con la matematica e con noi. Grazie, Martha!

Silvio Maracchia (2020). *Storia della matematica greca prima di Euclide: Matematica Matematica*. Roma: Simmetria.

Recensione di Bruno D'Amore

Questo libro è una ghiotta occasione per raccogliere informazioni dotte su temi e personaggi della matematica, anche su quelli a volte un po' trascurati. Mi spiego. Quando si leggono storie della matematica dell'antica Grecia, più o meno i nomi che si sentono citare sono sempre quelli; altre volte si trovano autori nominati di corsa, due parole appena sul loro contributo, ma sempre in una direzione reverenziale nei confronti dei più famosi. In questo libro sono citate parecchie centinaia di autori anche di seconda o terza grandezza, per ciascuno dei quali si evocano dati interessanti e, onestamente, non sempre noti, per lo meno a me che storico non sono, ma solo amante della storia.

D'altronde non si può credere che Euclide, Talete o Pitagora vivessero isolati. Attorno a loro sono ovviamente esistite schiere di studiosi, di maggior o minor calibro, ai quali i nostri grandi nomi si rivolgevano, con i quali discutevano e colloquiavano. Mi ha entusiasmato molto leggere di queste

centinaia di personaggi, dei loro contributi, delle loro opere, dei loro rapporti con i grandi.

Si comincia con un resoconto dettagliato delle fonti iniziali, si studia la scuola jonica, quella pitagorica, eleatica, di Chio, di Cnido, di Abdera, i sofisti, i megarici e gli stoici. Ogni capitolo è corredato di formidabili letture, alcune delle quali note, ma forse non altrettanto a tutti i cultori. Tali letture sono stralci di opere o loro commenti; ci sono perfino analisi sulle controversie dell'epoca che, tenuto conto del significato ampio del termine cultura, a quei tempi sfociano nella filosofia, nella medicina, ... Il nostro Autore, che è storico di razza, ha mille armi fra le mani che sfodera brillantemente; per esempio quando mostra la collaborazione feconda fra filosofia e matematica, spesso coesistenti nella stessa persona; a quell'epoca le due discipline non necessitavano affatto di autori diversi, spesso convivevano nello stesso autore.

E poi si giunge ad Aristotele e Platone, al sistema ipotetico deduttivo, alla matematica applicata. Sempre messa in secondo piano, oggi sappiamo, anche grazie a recenti studi, che la matematica applicata ebbe un grande influsso su quegli studiosi a tutto campo, fin da Talete, fra i Pitagorici, con Aristarco (conterraneo di Pitagora).

Un bel capitolo tratta in maniera chiarissima e mirabile dal punto di vista storico le cosiddette costruzioni con riga e compasso, mostrandone in modo impeccabile sia le fondazioni matematiche storiche, sia le interpretazioni moderne, che a molti sembrano mancare. A questo proposito c'è un dubbio che mi ha sempre affascinato: alcuni problemi erano risolti fin dall'antichità con riga e compasso, altri avevano avuto soluzioni, sì, ma non con quegli strumenti. Ci si è sempre chiesti se i matematici greci dell'epoca avessero la sensazione che, prima o poi, qualcuno avrebbe risolto questi problemi con riga e compasso o se invece già sospettassero quel che venne poi dimostrato parecchi secoli dopo, e cioè che tali soluzioni non sono possibili? Alla fine della prima parte del libro, il nostro Autore dà una sua interessante e colta interpretazione, assai convincente.

E si passa così alla seconda parte del libro, dal titolo singolare *Matematica Matematica*.

Maracchia fornisce 6 modi diversi di concepire la nostra disciplina: matematica applicata, teorica, mistica, come conoscenza ragionata, come sistema logico e, inaspettato, come ... pericolo. Sarebbe troppo facile se l'autore di una recensione spiegasse tutto, ma fallirebbe così il suo scopo, che è quello di incuriosire i potenziali lettori, spingendoli a essere tali, lettori per davvero. Per cui, tacerò! Ma la cosa è sottile e, se posso, divertente.

Seguono poi brevi capitoli su alcuni temi classici, tutti densi ed esposti in modo formidabile, denso e convincente: l'infinito; la matematica come umanesimo; come i matematici amano la matematica; com'è nato e come si è sviluppato il concetto di numero (dalle origini più remote ad alcuni risultati

rilevanti e densi di significato teorico); un'ipotesi sulla nascita della matematica, sulla sua natura; un curioso e stimolante capitolo che narra la storia di varie coppie di padre-e-figlio entrambi matematici, che ho trovato divertente e stuzzicante dal punto di vista aneddótico; legami fra la matematica e la Natura; cenni alla matematica fino al XX secolo; una riflessione di una persona colta che ha insegnato decenni sul problema dell'insegnamento della matematica.

Ho aspettato questo punto quasi finale della mia recensione per avvertire il lettore che questo libro è dedicato a Pitagora, situazione quasi mai vista in precedenza (la fanno da padroni le dediche a mogli, figli, famiglia, amici, maestri, ...).

So di poter dire con certezza che questo è un libro che dovrebbe essere nelle mani di chiunque sia curioso della storia della nostra disciplina, insegnante o no; ma ho la certezza che un docente, per esempio universitario o di scuola secondaria, potrebbe trarre molto giovamento non solo personale, culturale ed estetico, ma anche concreto, dato quel che questo libro è in grado di insegnare o di mostrare. Potrebbe costituire una fonte inarrestabile di informazioni matematiche, umane, culturali in genere, che potrebbero addirittura confluire in aula ed incuriosire, avvincere, educare gli studenti più curiosi, più vispi, più ... stimolabili.

Ne sono più che certo.

Per questo consiglio soprattutto gli insegnanti: che lo leggano con cura e che ne traggano esempi e storie attraenti, non solo tecniche.

Luis Radford (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Leiden & Boston: Brill Sense.

Recensione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Da tempo aspettavamo questo libro, più volte annunciato, necessario: non una raccolta di articoli scelti dell'Autore, fra le centinaia pubblicati in tutte le lingue, ma una riflessione critica, acuta, matura, profonda relativa alla teoria dell'oggettivazione, dopo poco meno di due decenni dalle sue prime apparizioni in forma esplicita. E così è!

Abbiamo avuto il privilegio di seguire la nascita e l'evoluzione della TO, anche di favorirne la diffusione, invitando Luis in varie occasioni, sia in congressi internazionali da noi organizzati, sia a pubblicare articoli in diverse modalità, in Atti e riviste. Abbiamo avuto il privilegio di collaborare con lui in molteplici circostanze, per esempio in tesi di dottorato, come editor di un numero speciale di una famosa rivista messicana, come coautori di un libro della editrice bogotana Universidad Distrital, come invitati da Luis a convegni,

a scrivere prologhi, a contribuire con articoli, addirittura a costruire un numero speciale di una rivista monotematica sulla TO. Abbiamo in più occasioni presentato la TO, suoi aspetti specifici, scavando nel ricco repertorio filosofico di interessanti autori (che, a volte, hanno sorpreso lui stesso, come ha detto in pubblico pochi giorni fa alla fine di una nostra conferenza); abbiamo scritto testi anche critici, mostrando in più occasioni, sulla falsariga del paragone costruttivo fra teorie, che un'analisi accurata dei fondamenti storici ed epistemologici delle diverse teorie non sempre deve avere come scopo la messa in evidenza di dissidi e dissonanze, ma addirittura a volte sottili coincidenze spesso inattese o, almeno, congruenze o similitudini; abbiamo partecipato a conferenze internazionali su questo tema, alle quali lo stesso Luis e suoi allievi hanno partecipato ... E potremmo proseguire a lungo.

Tutto ciò serve a illustrare, a evidenziare l'impatto notevole che ha avuto questo ultimo impegno di Luis su di noi! Finalmente si tratta di un lungo trattato completo, quasi 300 pagine, di esposizione, trattazione, spiegazione delle basi che hanno condotto a questa teoria, della logica anche empirica che l'ha guidata. Si tratta, per lo più, di sorprese per molti lettori: un libro ordinato, costruito in una forma logica formidabile, perfetta, oseremmo dire spietata, dalle origini filosofiche e semiotiche, che hanno fonte e fundamenta soprattutto nel pensiero di Vygotskij, alla capacità analitica di chi sa davvero osservare e interpretare i fatti empirici che si svolgono nelle aule, nell'eterno formidabile rapporto fra allievo, insegnante e sapere, alla sottile critica costruttiva che si nasconde nelle relazioni fra le diverse teorie di didattica della matematica elaborate prima della TO.

Viste così le cose, il libro non sorprende più. Andava scritto esattamente in questo modo, prima o poi; ed è tutto da leggere, meditare, approfondire, capire appieno nei suoi più sottili e nascosti anfratti teorici, metodologici, analitici, filosofici, pedagogici e, ovviamente, didattici.

Per far sì che questa recensione abbia un senso per chi ha già letto o per chi leggerà questo libro, seguiremo in maniera assolutamente precisa la sua evoluzione, dalla prima pagina all'ultima. Nel senso che delinearemo, qui di seguito, i suoi contenuti con frasi, a volte brevissime, che però riassumono paragrafi interi, secondo la logica spietata e seducente seguita dell'autore.

Si comincia con l'affermare che la TO è una teoria socioculturale, che si basa su analisi precise e sottili, critiche e analitiche di episodi d'aula, tutti descritti e commentati; che attinge talvolta in maniera contrastiva da altre teorie precedenti della didattica della matematica, spesso criticandone contenuti e interpretazioni; esaltando il passaggio dall'astratto (teoria) al concreto (analisi della realtà d'aula).

Tutto ciò porta un ricercatore a formulare domande di ricerca in gran parte nuove, diverse da quelle delle teorie precedenti; ma costringe anche a ideare e provare metodi di analisi e di ricerca più generali per giungere al rinnovamento dei principi teorici che animano le note precedenti teorie.

L'Autore conduce così ad analisi critiche diverse, analisi che Luis sa ben guidare. Prima quella all'epistemologia genetica di Piaget, più in generale alle diverse forme di costruttivismo e alla teoria delle situazioni. Essendo noi nati come ricercatori in questo ambiente, soprattutto come seguaci di Brousseau, ci teniamo a dire che non si tratta di critiche demolitorie, ma a nostro avviso di critiche costruttive; nel senso che ogni analisi critica deve essere interpretata e non essere solo assertoria contrastante: questo e quest'altro si possono interpretare così e così. Attenzione: si possono interpretare...: non si tratta di rigettare la teoria analizzata. Nostri recenti articoli hanno più volte evidenziato che ci sono elementi di base comuni e non solo contraddittorietà, specie se si pensa che: (a) i motivi ispiratori delle due teorie sono diversi e non si possono confutare, proprio in quanto principi; (b) le finalità analitiche sono diverse, le due teorie guardano ad aspetti diversi, con prospettive diverse, dunque sono in qualche modo complementari.

Da qui, da quest'analisi trae origine e necessità una nuova teoria, quella che, per motivi che lentamente sono esplicitati nel corso delle pagine successive, portano alla TO.

Il lettore si darà conto che solo ora inizia il libro!

Ovviamente, come tutti sanno, il punto di partenza è Vygotskij. Non ci fermiamo su questo punto perché, va bene che Luis lo fa a modo suo, magistrale e preciso, profondo e dotto, ma oramai sono temi e argomenti e analisi che dovrebbero essere ben noti a tutti coloro che si occupano di didattica della matematica. Ogni tanto appaiono nel testo incredibili tavole che sono sintetici sorprendenti summi filosofici e teorici di immenso respiro. La prima è dedicata a un panorama sinottico della TO; raccomandiamo al futuro lettore di tenerla sempre a portata di mano, per tutto il seguito della lettura del libro, fino alla fine. Incredibilmente densa e chiara (due aggettivi che spesso non possono essere posti nella stessa frase) dà subito l'idea di che cosa stiamo trattando.

E poi seguono quelle puntigliose analisi, cui Luis ci ha abituato nei decenni in altri suoi lavori: la differenza fra conoscenza e sapere, la conoscenza come *labour*, come cultura, come storia... E poi esempi e paragoni di tutto ciò, ma anche concreti, molto apprezzabili, già apparsi in altri suoi scritti: le analisi di tutto ciò sulla base di esempi tratti dalla musica, le opere sinfoniche (un esempio ricorrente in diversi scritti di Luis dal 2019). Chi ha letto questi articoli già immagina di che cosa stiamo parlando; chi ancora non l'ha fatto, si meraviglierà e resterà affascinato dal paragone strutturale calzante, strutturato e convincente.

Altro tema caldo: come intendere l'apprendimento. La base è sempre ancora Vygotskij, analizzato in maniera profonda e magistrale come mai prima avevamo letto in altri autori. Segue un'esposizione approfondita di come si debba interpretare il soggetto apprendente nell'ambito più generale di quelli proposti usualmente, quello della conoscenza culturale-storica. Si

giunge di nuovo così all'oggetto "situazione", ma con diversi significati che vengono tutti esaminati con analisi preziose e profonde, fino ad arrivare al clou, l'apprendimento come processo di oggettivazione. E qui non può sorprendere chi già conosce almeno in parte la TO la messa in evidenza dell'azione del processo di soggettivazione, tema di molti testi precedenti e anche di nostre ricerche e studi in proposito.

Il capitolo 5 è dedicato ai processi di oggettivazione, ma la cosa formidabile che dovrebbe attrarre ed entusiasmare anche i lettori non ricercatori, anche i docenti di scuola, sono i formidabili esempi che Luis propone, spesso sotto forma di sequenze di vignette e di trascrizione di dialoghi realmente tratti da momenti d'aula, una metodologia espositiva che colpisce molto. Davvero, le analisi dei dialoghi sorprendono anche gli esperti per la profondità capillare con la quale vengono proposti, che convincono e lasciano anche un po' stupiti. Ci sono analisi esplicite delle diverse componenti. È qui che fanno capolino concreto, come necessità teoriche, le idee ben note della TO: il concetto di *joint labour*, varie caratterizzazioni del termine conoscenza, che cosa è in concreto l'oggettivazione. Non sorprende qui trovare, anzi era da noi atteso, il tema della semiotica, ricordando che Luis ha iniziato i suoi lavori di semiotica seguendo la pista tracciata da Duval. I termini in gioco sono: mezzi semiotici di oggettivazione, nodi semiotici, contrazione semiotica, idee di concreto e di sintesi. Il lettore dovrà perdonarci se ci ripetiamo: tutto ciò esposto sì, teoricamente, ma sulla base concreta della descrizione di situazioni d'aula reali.

Il capitolo 6 è dedicato all'*embodiment*; parte da Marx e da Vygotskij, ancora con esempi concreti d'aula. Ogni tanto sorprende e forse può sorprendere i diversi lettori in modi diversi a seconda delle proprie competenze e propensioni. Noi siamo colpiti dalla "domesticazione degli occhi", dal discorso sul "saper guardare" e "saper puntare il dito" (il che ci ricorda lavori di Duval anche recentissimi), sempre grazie a esempi concreti tratti dalla vita d'aula, a diversi livelli di età. C'è un'affermazione che, esattamente a metà del libro, sorprende e affascina, ma che lasciamo come ricerca specifica all'interpretazione del futuro lettore: "la poesia è la poetica dell'oggettivazione". Sono pagine di una profondità e di un coraggio analitico sorprendenti.

Il capitolo 7 è dedicato alla descrizione delle attività che configurano il processo di insegnamento e apprendimento. Si parte, manco a dirlo, da un concreto esame delle attività d'aula attraverso le relazioni fra docente, allievo e sapere, con esempi che, davvero, spaziano su qualsiasi livello scolastico. Si tratta di un capitolo imperdibile, specie dedicato da noi due lettori a quei banali detrattori della TO, ascoltati talvolta a fine conferenze, che dichiarano essere TO solo una serie di affermazioni teoriche astratte non concrete, non suffragate dalla esperienza d'aula. Qui, tutto è solo concreto; ma si deve leggere e interpretare seguendo la via tracciata dall'Autore.

Il capitolo 8 era necessario, una specie di fondamento storico, epistemologico, filosofico e matematico sulla natura culturale del pensiero matematico, necessario per capire appieno la TO. Si risale ai Greci, a un'interpretazione della cultura dal punto di vista matematico dialettico, una reinterpretazione diversa da quelle usuali del pensiero matematico delle origini, specie quello greco, per esempio sulla differenza fra geometria teorica e geometria applicata, ma anche sull'aritmetica. Si tratta di un capitolo magistrale, profondo, denso e ricco, che potrebbe essere un testo a sé stante. Un vero gioiello. Sappiamo che è stato scritto durante un lungo periodo sabbatico, di recente, nei mesi della pandemia; ma, ovviamente basato su studi e riflessioni precedenti, durate anni.

Il capitolo 9 è tutto dedicato ai processi di soggettivazione (al plurale); che cosa sono i sistemi semiotici di significazione culturale; il doppio ponte: essere – divenire – soggettività. Sono temi noti a chiunque abbia seguito i precedenti lavori sulla TO, ma noi siamo rimasti colpiti, ancora una volta, dal fatto che tutto ciò si basi sull'analisi di situazioni reali d'aula, minuziosamente descritte attraverso vignette disegnate, trascrizioni di dialoghi avvenuti in aula. Un esempio determinante e convincente è quello di bambini di terza primaria che sono posti di fronte al problema della risoluzione di equazioni. Quel che dicono, quel che fanno, come interagiscono tra loro, con l'adulto, soprattutto con il sistema matematico, sembra essere la dimostrazione più lampante che sì, la TO ha una marcia esplicativa in più, profonda e semplice allo stesso tempo. Ci ha davvero impressionato.

E infine, atteso, il tema Etica, nel capitolo finale, il 10. Come molti sanno, da poco è stato pubblicato un libro che vede Luis fra i due editor, tutto dedicato all'etica, a metà strada fra filosofia e didattica, con preciso e più specifico riferimento alla didattica della matematica. Questo capitolo non è il sunto di quel libro recente, ma una specie di discussione sociale e didattica di come sia necessario non dimenticare questo aspetto; si limita ad affermare che non si può ignorare la presenza dell'etica nelle ore di matematica a scuola e i riferimenti culturali sono Kant, Hobbes e Levinas. Gli esempi proposti in relazione all'educazione matematica sono contundenti e convincenti, specifici e precisi, specie se ci si inserisce nella TO; basti pensare all'etica comunitaria insita nel *joint labour*, che è uno dei capisaldi della TO.

Non vogliamo ripeterci, ma questo libro era necessario e in qualche misura atteso; invitiamo a leggerlo e meditarlo tutti coloro che, in qualsiasi forma, percorrono le molteplici strade della didattica della matematica; la descrizione minuziosa e capillare che vi si fa della TO è di una chiarezza esemplare. Si è condotti per mano, dal suo stesso creatore, con eleganza e dovizia di particolari di ogni tipo. Impossibile, d'ora in poi, anche per un ricercatore, non citare questo libro nei propri lavori scritti e non farne uso nella propria esperienza di ricercatore.

Dedication <i>Bruno D'Amore</i>	pp. 117–118
Editoriale <i>Bruno D'Amore</i>	pp. 119–121
Análisis a los vectores de la ética comunitaria en una actividad de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas Analysis of the vectors of community ethics in a mathematics teaching-learning activity Analisi dei vettori dell'etica comunitaria in un'attività di insegnamento-apprendimento della matematica <i>Adriana Lasprilla Herrera</i>	pp. 123–143
Unas reflexiones básicas sobre el tema de las relaciones entre ética y didáctica de la matemática Some basic reflections on the issue of the relationship between ethics and mathematics education Riflessioni di base sul tema delle relazioni fra etica e didattica della matematica <i>Bruno D'Amore</i>	pp. 145–158
Hibridación de teorías en el sistema teórico del enfoque ontosemiótico Hybridisation of theories in the onto-semiotic theoretical system Ibridazione di teorie nel sistema teorico dell'approccio ontosemiotico <i>Juan D. Godino</i>	pp. 159–184
Mathematics teaching and learning as an ethical event Insegnamento e apprendimento della matematica come un evento etico Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como un evento ético <i>Luis Radford</i>	pp. 185–198
La formación de maestros/as y profesores/as de matemática: Conocimiento, procesos de razonamiento y práctica Mathematics teacher education: Knowledge, reasoning processes and practice La formazione di maestri e professori di matematica: Conoscenza, processi di ragionamento e pratica <i>Salvador Llinares</i>	pp. 199–214
RECENSIONI	pp. 215–225